§ 5.3. Введение в теорию массового обслуживания

Предмет теории массового обслуживания — вероятностные модели реальных систем массового обслуживания (СМО). Состояние СМО описывает марковский процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.

Любая реально функционирующая СМО (автозаправочная станция, парикмахерская, столовая и т.п.) соединяет в себе по крайней мере три составляющие:

1) входящий поток требований (заявок) на обслуживание;

2) обслуживающую систему;

3) выходящий поток обслуженных заявок и поток заявок, получивших отказ.

Любая реальная СМО может быть представлена как простая или сложная система из многих таких составляющих.

Под *входящим потоком* понимается последовательность случайных моментов времени t_1, t_2,... поступления заявок в систему. *Интенсивностью входящего потока* называется среднее число требований, поступающих в систему в единицу времени.

Если при занятой обслуживающей системе вновь пришедшая заявка получает отказ, то такая СМО называется *системой с отказами*, в противном случае — *системой с очередью*. Различают системы с неограниченной очередью и ограниченной очередью, в последнем случае заявка теряется, если очередь уже достигла предельной длины.

Под организацией очереди понимается порядок обслуживания поступивших требований: если некоторые заявки имеют преимущества в постановке на обслуживание, то такая СМО называется *системой с приоритетами*.

Ниже будут рассматриваться системы без приоритетов и с ограниченной очередью. Системы с отказами и с неограниченной очередью являются особыми частными случаями систем с ограниченной очередью. Максимальное число требований, которые могут находиться в такой системе, будет обозначаться через N.

Обслуживающая система состоит из обслуживающих каналов. Каждый канал может осуществлять лишь один вид обслуживания и одновременно обслуживать лишь одно требование. Если система включает в себя каналы, которые могут выполнять много видов обслуживания, то такая система называется *многофазной.*

Наличие нескольких каналов (многоканальная СМО) позволяет увеличить интенсивность обслуживания однофазной системы, поскольку параллельно могут обслуживаться несколько требований. Далее будут изучаться многоканальные однофазные СМО. Число каналов в такой системе будет обозначаться буквой n.

Интенсивностью обслуживания (каналом или всей обслуживающей системой) называется среднее число требований, обслуженных в единицу времени.

Изучение выходящего потока особенно актуально тогда, когда требования, прошедшие один вид обслуживания, поступают на следующий вид обслуживания (на следующую фазу), т.е. выходящий поток становится входящим потоком для другой фазы.

Простейший входящий поток

Входящий поток требований называется *простейшим*, если этот поток обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Обозначим через $X(t)$ число требований, поступивших во входящем потоке к моменту времени t, полагая при этом, что $X(0) = 0$. Вероятность того, что за время t придет конкретное число требований k, зависит от того, где находится интервал длиною t:

$$P\{X(t+s)-X(s)=k\}=p_k(s,t). \qquad (5.3.1)$$

Входящий поток требований называется *стационарным*, если вероятности (5.3.1) не зависят от расположения интервала, но зависят только от его длины:

$$P\{X(t+s)-X(s)=k\}=P\{X(t)-X(0)=k\}=p_k(t). \qquad (5.3.2)$$

Таким образом, $p_k(t)$ — вероятность того, что за время t поступит k требований.

Входящий поток требований называется *потоком с отсутствием последействия*, если будущее поступление заявок не зависит от того, как они поступали в прошлом, иными словами, если $t_1 < t_2 <...< t_n < s < t$, то

$$P\{X(t)-X(s)=k/X(t_1)=i_1,...,X(t_n)=i_n,\ X(s)=i\}=P\{X(t)-X(s)=k\}. \qquad (5.3.3)$$

Из отсутствия последействия вытекает условие марковости [см. формулу (5.2.1)] процесса $X(t)$:

$$P\{X(t)=j/X(t_1)=i_1,\ldots,X(t_n)=i_n,\ X(s)=i\}=$$

$$=P\{X(t)-X(s)=j-i/X(t_1)=i_1,\ldots,X(t_n)=i_n,\ X(s)=i\}=$$

$$=P\{X(t)-X(s)=j-i/X(s)=i\}=P\{X(t)=j/X(s)=i\}.$$

Условие стационарности означает однородность марковского процесса $X(t)$ — числа заявок, поступивших за время t.

Входящий поток называется *ординарным*, если за малый промежуток времени приход двух или более требований маловероятен (вероятность такого события равна бесконечно малой величине более высокого порядка по сравнению с Δt):

$$p_k(\Delta t) = o(\Delta t), \quad k = 2, 3, \dots . \tag{5.3.4}$$

❑ Докажем теперь, что простейший поток требований является пуассоновским, т.е. все его конечномерные распределения – пуассоновские.

Начнем с вероятности $p_0(t)$, т. е. вероятности того, что за время t в систему не поступит ни одного требования. Поскольку $0 < p_0(1) < 1$, то эту вероятность можно записать в виде

$$p_0(1) = e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = -\ln p_0(1) > 0.$$

Пользуясь условиями стационарности и отсутствия последействия, имеем:

$$\left[p_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = p_0(1) = e^{-\lambda},$$

поэтому $p_0\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\lambda/n}$. Далее, поскольку $p_0\left(\frac{k}{n}\right) = \left[p_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k$, то $p_0\left(\frac{k}{n}\right) = e^{-\lambda k/n}$, а отсюда уже с непреложностью вытекает [см. аналогичное доказательство формулы (5.2.8)]

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Подключая теперь условие ординарности, получаем следующее дифференциальное соотношение для любой вероятности состояния при $k > 1$ [приход двух требований и более за время Δt имеет вероятность $o(\Delta t)$]:

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t)p_0(\Delta t) + p_{k-1}(t)p_1(\Delta t) + o(\Delta t).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &p_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), \\ &p_1(\Delta t) = 1 - p_0(\Delta t) - p_2(\Delta t) - \dots = \lambda\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

то

$$p_k(t + \Delta t) - p_k(t) = -\lambda p_k(t)\Delta t + \lambda p_{k-1}(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

После деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ окончательно получаем

$$\frac{dp_k}{dt} = -\lambda p_k + \lambda p_{k-1}, \quad p_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{5.3.6}$$

при этом для $k > 0$ $p_k(0) = 0$, поскольку $P\{X(0) = 0\} = 1$.

Для решения уравнений (5.3.6) сделаем замену:

$$p_k = e^{-\lambda t} u_k, \quad u_k = e^{\lambda t} p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

(в частности, при $k = 0$ $u_0 = 1$, поскольку $p_0(t) = e^{-\lambda t}$), тогда

$$\frac{du_k}{dt} = \lambda u_{k-1}, \quad u_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{5.3.7}$$

Решим сначала первое уравнение системы (5.3.7):

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda, \quad u_1(0) = 0,$$

тогда $u_1 = \lambda t$,
затем второе уравнение

$$\frac{du_2}{dt} = \lambda^2 t, \quad u_2(0) = 0,$$

тогда $u_2 = \dfrac{\lambda^2 t^2}{2!}$.

Наконец, для любого $k > 0$ получаем

$$u_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Возвращаясь к вероятностям, окончательно имеем:

$$p_k(t) = P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5.3.8}$$

т.е. одномерные распраделения являются пуассоновскими. ■

Используя формулу (5.3.8), найдем среднее число требований, поступающих в систему за время t (см. § 3.2):

$$MX(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t. \tag{5.3.9}$$

Из уравнения (5.3.9) находим

$$\lambda = \frac{MX(t)}{t}. \tag{5.3.10}$$

Таким образом, λ — среднее число требований, поступающих в систему в единицу времени, или интенсивность входящего потока требований.

Система обслуживания с экспоненциальными каналами

В аналитической теории массового обслуживания предполагается, что время обслуживания τ одного требования каналом распределено по показательному закону, функция плотности вероятности которого имеет вид:

$$f_\tau(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{5.3.11}$$

Поскольку

$$M\tau=\frac{1}{\mu},\quad \mu=\frac{1}{M\tau},$$

поэтому μ — интенсивность обслуживания.

Поскольку

$$F_\tau(t)=P\{\tau<t\}=1-e^{-\mu t},$$

то

$$P\{\tau>t\}=e^{-\mu t}. \tag{5.3.12}$$

В частности, при малом Δt

$$P\{\tau>\Delta t\}=e^{-\mu\Delta t}=1-\mu\Delta t+o(\Delta t),$$
$$P\{\tau<\Delta t\}=1-e^{-\mu\Delta t}=\mu\Delta t+o(\Delta t).$$

Показательное распределение как распределение времени обслуживания обладает следующим свойством: длительность предстоящего обслуживания не зависит от того, сколько обслуживание уже продолжалось:

$$P\{\tau>s+t/\tau>t\}=\frac{P\{\tau>s+t,\ \tau>t\}}{P\{\tau>t\}}=\frac{P\{\tau>s+t\}}{P\{\tau>t\}}=$$

$$=\frac{e^{-\mu(s+t)}}{e^{-\mu t}}=e^{-\mu s}=P\{\tau>s\}. \tag{5.3.13}$$

Если в обслуживающей системе в каждый момент t находится k требований, $k\leqslant n$, то вероятность того, что за малое время Δt не закончится обслуживание ни одного требования (τ_i — время обслуживания требования i-м каналом):

$$P\{\tau_1>\Delta t,\ \ldots,\ \tau_k>\Delta t\}=\prod_{i=1}^{k}P\{\tau_i>\Delta t\}=e^{-k\mu\Delta t}=1-k\mu\Delta t+o(\Delta t),$$

а вероятность того, что закончится обслуживание ровно одного требования,

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{k}\left(\tau_1>\Delta t, \ldots, \tau_i<\Delta t, \ldots, \tau_k>\Delta t\right)\right\}=k\mu\Delta t+o(\Delta t), \qquad (5.3.14)$$

вероятность же того, что будет обслужено более одного требования, – $o(\Delta t)$.

Уравнения для вероятностей состояний многоканальной СМО с ограниченной очередью

Рассмотрим теперь, как функционирует однофазная n-канальная СМО с ограниченной очередью длиною не более $(N-n)$, на вход которой поступает простейший поток требований с интенсивностью λ, а каждый канал обслуживающей системы является показательным с интенсивностью обслуживания μ. На рис. 5.1 приведена схема такой СМО.

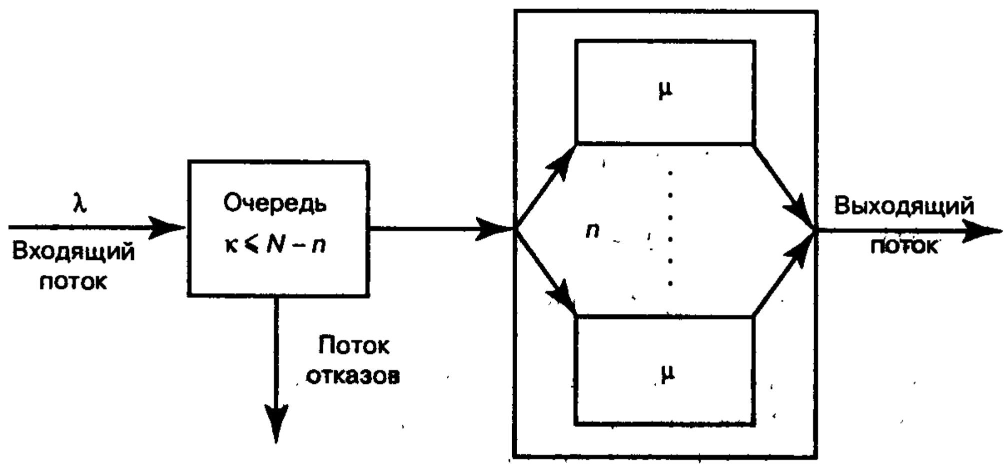

Рис. 5.1

Обозначим через $X(t)$ число требований в системе в момент t. Поскольку входящий поток и обслуживающая система обладают марковским свойством, то $X(t)$ как результат их взаимодействия является марковским процессом с $(N+1)$ состоянием ($k=0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots, N$).

В таком случае (см. § 5.2) вероятности состояний системы

$$p_k(t)=P\{X(t)=k\}, \quad k=0,1,\ldots,N,$$

удовлетворяют уравнениям (5.2.12). Чтобы найти конкретный вид этих уравнений для рассматриваемого процесса $X(t)$, надо найти плотности вероятностей выхода из состояний и перехода из одного состояния в другое.

Поскольку из-за ординарности входящего потока приход двух требований и более за малое время Δt имеет вероятность $o(\Delta t)$, а экспоненциальная обслуживающая система может за время Δt закончить обслуживание двух требований и более также с вероятностью $o(\Delta t)$, то отличны от нуля только плотности вероятности перехода в соседние состояния.

Используя уравнения (5.3.5) и (5.3.14), получаем:

вероятность того, что за время Δt пришло новое требование во входящем потоке,

$$p_{k,k+1}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

а вероятность того, что за время Δt обслуживающая система закончила обслуживание одного требования,

$$p_{k,k-1}(\Delta t) = \begin{cases} k\mu\Delta t, & k = 1, \ldots, n, \\ n\mu\Delta t, & k = n+1, \ldots, N. \end{cases}$$

Поэтому

$$\lambda_{k,k+1} = \lambda, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\lambda_{k,k-1} = \begin{cases} k\mu, & k = 1, \ldots, n, \\ n\mu, & k = n+1, \ldots, N. \end{cases}$$

Поскольку

$$p_{kk}(\Delta t) = \begin{cases} 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), & k = 0, \\ 1 - p_{k,k-1}(\Delta t) - p_{k,k+1}(\Delta t) + o(\Delta t), & k = 1, \ldots, N-1, \\ 1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t), & k = N, \end{cases}$$

то

$$\lambda_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{kk}(\Delta t)}{\Delta t} = \begin{cases} \lambda, & k = 0, \\ \lambda + k\mu, & k = 1, \ldots, n, \\ \lambda + n\mu, & k = n+1, \ldots, N-1, \\ n\mu, & k = N. \end{cases}$$

Соответственно

$$\lambda_{kk} = -\lambda_k = \begin{cases} -\lambda, & k = 0, \\ -(\lambda + k\mu), & k = 1, \ldots, n, \\ -(\lambda + n\mu), & k = n+1, \ldots, N-1, \\ -n\mu, & k = N. \end{cases}$$

Тем самым матрица Λ в нашем случае примет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\mu & -(\lambda+n\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n\mu & -n\mu \end{pmatrix},$$

таким образом, полностью заполнены диагональ, а также верхняя и нижняя поддиагонали.

Расписывая матричную запись $p\Lambda = 0$ по уравнениям, получаем следующую систему алгебраических уравнений для стационарных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, & k = 0, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, & k = 1, \ldots, n-1, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + n\mu)p_k + n\mu p_{k+1} = 0, & k = n, \ldots, N-1, \\ \lambda p_{N-1} - n\mu p_N = 0, & k = N. \end{cases} \tag{5.3.15}$$

Поскольку определитель системы (5.3.15) равен нулю, то одно из ее уравнений является следствием других. Поэтому, заменив последнее уравнение системы на естественное $\sum\limits_{k=0}^{N} p_k = 1$, окончательно получаем систему из $(N + 1)$ уравнения для $(N + 1)$-й стационарной вероятности:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, & k = 0, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, & k = 1, \ldots, n-1, \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + n\mu)p_k + n\mu p_{k+1} = 0, & k = n, \ldots, N-1, \\ p_0 + p_1 + \ldots + p_N = 1. \end{cases} \tag{5.3.16}$$

Вначале выразим все вероятности через p_0, а затем найдем p_0 из последнего уравнения, в результате получим

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} p_0, & k = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{\rho^k}{n! n^{k-n}} p_0, & k = n+1, \ldots, N, \end{cases} \tag{5.3.17}$$

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{1-(\rho/n)^{N+1}}{1-\rho/n}\right]^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что вероятность

$$p_N=\frac{\rho^N}{n!n^{N-n}}p_0,$$

найденная как решение уравнений (5.3.15) (без последнего уравнения), удовлетворяет последнему из уравнений (5.3.15), т.е. это уравнение действительно есть следствие остальных уравнений системы (5.3.15).

Далее через X будем обозначать случайную величину — число требований в системе в установившемся режиме.

Функционирование СМО различно для трех стадий (режимов):

1. Заполнение системы после начала ее работы, вероятности состояний зависят от времени и определяются как решение системы дифференциальных уравнений.

2. Функционирование системы в установившемся режиме, вероятности состояний не зависят от времени [см. выражение (5.3.17)].

3. Прекращение приема новых заявок на обслуживание и освобождение системы от оставшихся заявок путем их обслуживания; вероятности зависят от времени и являются решением дифференциальных уравнений.

В нашем случае это следующие линейные неоднородные дифференциальные уравнения ($p_N=1-p_0-p_1-\ldots-p_{N-1}$) с начальными условиями $p_0(0)=1,\ \ p_k(0)=0,\ \ k=1,\ldots,N-1$:

$$\begin{cases}\dfrac{dp_0}{dt}=-\lambda p_0+\mu p_1, & k=0,\\ \dfrac{dp_k}{dt}=\lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}, & k=1,\ldots,n-1,\\ \dfrac{dp_k}{dt}=\lambda p_{k-1}-(\lambda+n\mu)p_k+n\mu p_{k+1}, & k=n,\ldots,N-2,\\ \dfrac{dp_{N-1}}{dt}=-n\mu p_0-\ldots-n\mu p_{N-3}+(\lambda-n\mu)p_{N-2}-(\lambda+2n\mu)p_{N-1}+n\mu, & k=N-1.\end{cases}$$

В Приложении 1 найдено решение этой системы при $n=1$, $N=2$ и любом начальном условии $p_0(0)=q_0$, $p_1(0)=q_1$. Это решение имеет вид:

$$p_i(t)=p_i+B_{1i}e^{-\nu_1 t}+B_{2i}e^{-\nu_2 t},\quad \nu_1,\nu_2>0,\ \text{т. е.}$$

$$\lim_{t\to\infty}p_i(t)=p_i,\quad i=0,1,$$

поэтому при $t \to \infty$ решение стремится к стационарному. В общем случае имеет место то же самое. Таким образом, после завершения переходного процесса система переходит в установившийся режим, описываемый стационарным распределением вероятностей. Хотя чисто теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго, практически он занимает относительно небольшую долю общего времени функционирования системы, наибольшая доля приходится на установившийся (стационарный) режим. Поэтому средние характеристики, описывающие качество и экономичность обслуживания, надо определять на базе стационарного распределения. Такие характеристики называются *операционными*.

Операционные характеристики многоканальной СМО с ограниченной очередью

Наиболее важными, с точки зрения клиентов, характеристиками СМО являются **средняя длина очереди, среднее время ожидания** в очереди, **вероятность отказа** и **вероятность того, что придется стоять в очереди**. Обозначим через κ_q — текущее число требований в очереди, τ_q — время ожидания в очереди наугад взятой заявки.

Имеем (штрихом обозначена производная):

$$M\kappa_q = \sum_{k=n+1}^{N}(k-n)p_k = \sum_{k=n+1}^{N}(k-n)\frac{p_0\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} = \frac{p_0\rho^{n+1}}{n!n}\sum_{i=1}^{N-n} i\left(\frac{\rho}{n}\right)^{i-1} =$$

$$= \frac{p_0\rho^{n+1}}{n!n}\sum_{i=1}^{N-n}\left(\frac{\rho}{n}\right)'_{\rho/n} = \frac{p_0\rho^{n+1}}{n!n}\left[\sum_{i=0}^{N-n}\left(\frac{\rho}{n}\right)^i\right]'_{\rho/n} = \frac{p_0\rho^{n+1}}{n!n}\left[\frac{1-(\rho/n)^{N-n+1}}{1-\rho/n}\right]'_{\rho/n} =$$

$$= \frac{p_0\rho^{n+1}}{n!n}\,\frac{1-(N-n+1)(\rho/n)^{N-n}+(N-n)(\rho/n)^{N-n+1}}{(1-\rho/n)^2}.$$

Сравнивая с выкладками для κ_q, аналогично находим

$$M\tau_q = \sum_{k=n}^{N-1} p_k M\left(\tau_q / X = k\right) = \sum_{k=n}^{N-1}\frac{p_0\rho^k}{n!n^{k-n}}\,\frac{(k-n+1)}{n\mu} =$$

$$= \frac{p_0\rho^n}{n!n\mu}\sum_{k=n}^{N-1}(k-n+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} = \frac{p_0\rho^n}{n!n\mu}\sum_{i=1}^{N-n} i\left(\frac{\rho}{n}\right)^{i-1} = \frac{M\kappa_q}{\lambda} =$$

$$= \frac{p_0\rho^{n+1}}{n!n\lambda}\,\frac{1-(N-n+1)(\rho/n)^{N-n}+(N-n)(\rho/n)^{N-n+1}}{(1-\rho/n)^2}.$$

Таблица 5.1

Наименование характеристики	СМО с ограниченной очередью	СМО с неограниченной очередью	СМО с отказами
Вероятности состояний $p_k = P\{X = k\}$	$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1-(\rho/n)^{N+1}}{1-\rho/n}\right]^{-1}$ $p_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} p_0, & k = 1, \ldots, n, \\ \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} p_0, & k = n+1, \ldots, N \end{cases}$	$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{1-\rho/n}\right]^{-1}$ $p_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} p_0, & k = 1, \ldots, n, \\ \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} p_0, & k = n+1, \ldots \end{cases}$	$p_k = \frac{\rho^k / k!}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$
Средняя длина очереди $M\kappa_q$	$\frac{p_0 \rho^{n+1}}{n! n} \frac{1-(N-n+1)(\rho/n)^{N-n} + (N-n)(\rho/n)^{N-n+1}}{(1-\rho/n)^2}$	$\frac{p_0 \rho^{n+1}}{n! n (1-\rho/n)^2}$	–
Среднее время ожидания в очереди $M\tau_q$	$M\kappa_q / \lambda$	$M\kappa_q / \lambda$	–
Среднее число занятых каналов $M\nu$	$p_0 \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!} \frac{1-(\rho/n)^{N-n+1}}{1-\rho/n}\right]$	$p_0 \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!(1-\rho/n)}\right]$	$p_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{(k-1)!}$
Вероятность отказа p_N	$\frac{\rho^N}{n! n^{N-n}} p_0$	–	$\frac{\rho^n}{n!} p_0$
Вероятность того, что заявка будет ждать $P\{n \le X \le N-1\}$	$p_0 \frac{\rho^n}{n!} \frac{1-(\rho/n)^{N-n}}{1-\rho/n}$	$p_0 \frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{1-\rho/n}$	–

Заявка получает отказ тогда, когда в системе уже находится предельно допустимое число требований N, поэтому вероятность отказа

$$p_N = \frac{\rho^N}{n!n^{N-n}} p_0.$$

Вероятность того, что заявка будет ждать, определяем следующим образом:

$$P\{n \le X \le N-1\} = \sum_{k=n}^{N-1} p_k = \frac{p_0 \rho^n}{n!} \sum_{i=0}^{N-n-1} \left(\frac{\rho}{n}\right)^i = p_0 \frac{\rho^n}{n!} \frac{1-(\rho/n)^{N-n}}{1-\rho/n}.$$

С точки зрения управляющего или владельца СМО, важное значение имеют «холостой ход» (доля времени простоя обслуживающей системы) и среднее число занятых каналов.

Первая (из названных) характеристика — вероятность того, что в системе нет требований

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1-(\rho/n)^{N+1}}{1-\rho/n}\right]^{-1}.$$

Вторую характеристику — среднее число занятых каналов — находим следующим образом (ν — число занятых каналов):

$$M\nu = \sum_{k=1}^{n-1} k p_k + n \sum_{k=n}^{N} p_k = p_0 \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!} \frac{1-(\rho/n)^{N-n+1}}{1-\rho/n}\right].$$

Соответствующие характеристики для СМО с **неограниченной** очередью получаем из приведенных выше путем перехода к пределу при $N \to \infty$, при этом должно быть $\rho < 1$, или $\lambda < \mu$, а для СМО с **отказами** — путем подстановки $N = n$. Все полученные результаты сведены в табл. 5.1.

Понятие об имитации функционирования СМО

Как только не выполняется одно из предположений, сделанных выше для обеспечения аналитического исследования системы вплоть до получения формул для важнейших операционных характеристик, так приведенные формулы становятся, вообще говоря, неправильными.

Повторим эти предположения:

1) входящий поток требований — простейший, при таком потоке время между приходом двух требований имеет показательный закон распределения с параметром λ;

2) все каналы обслуживающей системы — показательные с параметром μ;

3) система без приоритетов, т.е. все поступающие заявки обслуживаются в порядке очереди;

4) система однофазная, т.е. производится один вид обслуживания;

5) система разомкнутая.

Имеющиеся имитационные пакеты прикладных программ моделируют:

длительность обслуживания с любым законом распределения;

время между приходом заявок также с любым законом распределения;

процесс функционирования СМО при строго формализованном алгоритме такого функционирования.

Для имитации на ПЭВМ функционирования изучаемой СМО необходимо:

1) составить блок-схему и алгоритм функционирования СМО;

2) установить законы (с точным указанием параметров распределения) для промежутков времени между поступлением заявок во всех входящих потоках и для времени обслуживания каждого канала;

3) подобрать пакет прикладных программ, пригодный для имитации изучаемой системы;

4) описать на языке пользователя функционирование изучаемой системы;

5) ввести указанные сведения в программную систему и провести иа ПЭВМ имитацию функционирования СМО, в результате чего будут получены оценки операционных характеристик, тем более точные, чем больше заявок во входящих потоках будет разыграно.

В качестве примера на рис. 5.2 приведена блок-схема функционирования трехфазной СМО, осуществляющей человеко-машинный процесс доения коров:

фаза 1 — подготовка животного к машинному доению (осуществляется оператором);

фаза 2 — доение (осуществляется доильной установкой);

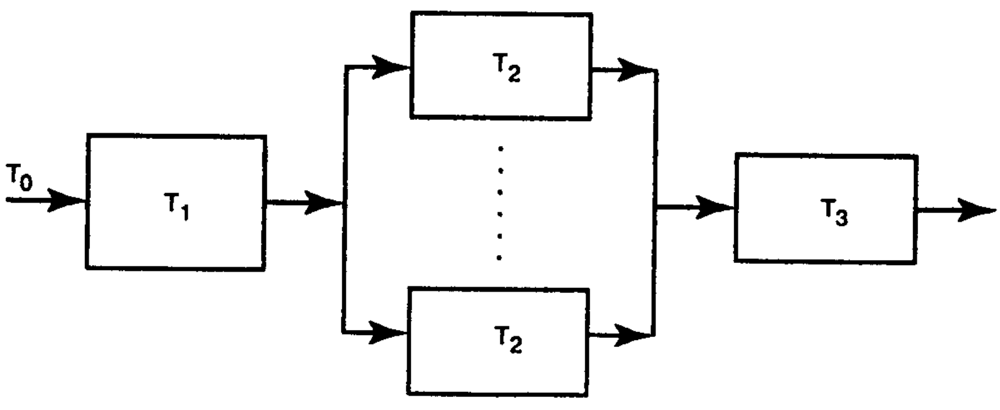

Рис. 5.2

фаза 3 — освобождение животного от доильного аппарата (осуществляется оператором).

На этом рисунке: T_0 — время между поступлением животных; T_i — время i-го вида обслуживания, $i = 1, 2, 3$.

Законы распределения в такой ситуации могут быть нормальными с примерно следующими средними: $MT_0 = MT_1 = MT_3 = 1$ мин, $MT_2 = 6$ мин.

Первую и третью фазы может осуществлять один оператор либо на каждую из них может быть выделен отдельный оператор.

Вопросы и задачи

1. Автозаправочная станция имеет 4 бензоколонки. Среднее время заправки — 2 мин. Входящий поток автомашин — простейший с интенсивностью 1,5 авт./мин. При всех занятых колонках требование теряется. Определить вероятность отказа и среднее число занятых колонок.

2. Покупатели магазина образуют простейший поток требований с интенсивностью 150 чел./ч. Определить наименьшее число продавцов, при которых среднее число покупателей, ожидающих обслуживания, не превысит 3.

3. В нефтеналивном порту 4 причала для заправки танкеров, которые приходят в среднем через 18 ч, а время загрузки составляет в среднем двое суток. В очереди могут стоять не более 2 танкеров. Определить пропускную способность и холостой ход порта.

4. Определить закон распределения промежутка времени между приходом двух требований в простейшем потоке требований интенсивностью λ.

5. Поток желающих оформить вызов врача на дом — простейший. В среднем абоненты звонят через каждые 10 с. Время приема вызова распределено по показательному закону со средним значением 12 с. Определить наименьшее число телефонов в регистратуре, при котором вызов принимается не менее чем от 90% абонентов. Считается, что в случае неудачи абонент не предпринимает больше попыток дозвониться.

6. Доказать, что выходящий из показательного канала (на входе которого всегда имеются заявки) поток является простейшим.

7. Автоматическая мойка может принять на обслуживание одновременно 4 автомашины. В среднем машины прибывают через 2 мин, а средняя продолжительность мойки — 10 мин. В очереди могут находиться не более 6 машин. Определить вероятность того, что в системе находится хотя бы одна машина, и загруженность одной установки для мойки машин.

8. В магазине имеется 3 справочных телефона. В среднем обращаются за справками 40 чел./ч. Средняя продолжительность справочного разговора 3 мин. Издержки, связанные с работой одного телефона, — a руб./мин. Определить минимальную стоимость одной минуты разговора по телефону, при которой система неубыточна.

9. Каким условиям должны отвечать случайные величины X, Y для того, чтобы случайный процесс $Z(t) = X\cos \omega t + Y\sin \omega t$ был стационарным в широком смысле?

10. Платная стоянка для легковых автомашин имеет 7 мест. Найти вероятность того, что прибывающая машина найдет свободное место, если машины в среднем прибывают через 10 мин, а занимают место на стоянке в среднем 1 ч.

11. Поток деталей, сходящих с конвейера, простейший с интенсивностью 2 дет./мин. Время проверки детали контролером имеет показательный закон распределения со средним 2 мин/дет. Определить долю непроверенных деталей.

12. Город обслуживают 4 машины скорой помощи. Вызовы поступают в среднем через 4 ч. Вероятность того, что хотя бы одна машина занята, равна 0,25. Определить среднее число занятых машин и среднюю долю простоя машин.

13. В парикмахерской работают два мастера. Время обслуживания распределено по показательному закону со средним 12 мин. Ожидать обслуживание могут не более трех человек. Поток клиентов — простейший с интенсивностью 10 клиентов/ч. Найти важнейшие операционные характеристики этой системы.

14. Система автоматической посадки самолетов одновременно может хранить данные только о шести самолетах, находящихся в воздухе. Самолеты, подлетающие к аэродрому, образуют простейший поток с интенсивностью 6 самолетов/ч. Если в момент запроса посадки система заполнена, то самолет улетает к запасному аэродрому. Аэродром имеет 3 посадочные полосы, самолет занимает полосу в среднем 20 мин. Найти пропускную способность СМО, загруженность одной полосы, среднее число занятых полос, среднее время ожидания начала посадки после запроса.

15. Система обслуживания изменяет свои состояния в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \ldots$, имеет два состояния: 0 (свободно), 1 (занято). Матрица переходных вероятностей (за один шаг) имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

где a — вероятность поступления требования, b — вероятность окончания обслуживания. Найти стационарное распределение вероятностей.