М.Н.Свириденко

Теория массового обслуживания

Московский государственный университет леса

М.Н.Свириденко

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Москва - 1996

Кафедра высшей математики

Автор - Марина Николаевна Свириденко, доцент

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

I. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. - М.: Радио и связь, I983. - 4I6 с.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи,принципы,методология. - М.: Наука, I988. - 208 с.

I. ПОНЯТИЕ О МАРКОВСКОМ ПРОЦЕССЕ С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Пусть имеется некоторая физическая система S, которая течением времени меняет своё состояние /переходит из одного стояния в другое/, причём заранее неизвестным, случайным об-зом. Тогда мы будем говорить, что в системе S протекает учайный процесс.

Под "физической системой" можно понимать что угодно: хническое устройство, группу таких устройств, предприятие, расль промышленности, живой организм, популяцию и т.д. Боль-нству процессов, протекающих в реальных системах, свойственны той или иной мере черты случайности, неопределённости.

Процесс называется процессом с дискретными состояниями, ли его возможные состояния $S_1, S_2, S_3 \dots$ можно заранее речислить /перенумеровать/, и переход системы из состояния состояние происходит "скачком", практически мгновенно.

Процесс называется процессом с непрерывным временем, ли моменты возможных переходов из состояния в состояние не ксированы заранее, а неопределённы, случайны, если переход мо-т осуществиться, в принципе, в любой момент.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется рковским процессом /или процессом без последействия/, если обладает следующим свойством: для каждого момента времени о вероятность любого состояния в будущем /при $t > t_0$ / висит только от её состояния в настоящем /при $t = t_0$ / и зависит от того, когда и каким образом система пришла в это стояние /т.е. как развивался процесс в прошлом/.

Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерыв-м временем называется непрерывной цепью Маркова.

Для построения математической модели непрерывных цепей ркова нужно понятие потока событий.

2. ПОТОКИ СОБЫТИЙ

Потоком событий называется последовательность однородных ытий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты мени. Например: поток вызовов на телефонной станции, поток азов ЭВМ, поток железнодорожных составов, поступающих на эзнодорожную станцию, и т.д.

Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на времени:

Простейшим/пуассоновским/ называют поток событий, который обладает следующими тремя свойствами: стационарностью, отсутствием последействия и ординарностью.

Свойство стационарности состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка времени и не зависит от начала его отсчёта.

Свойство отсутствия последействия состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, сколько событий и в какие моменты появлялись до этого промежутка.

Свойство ординарности состоит в том, что вероятность появления более одного события за малый промежуток времени есть величина более высокого порядка малости, чем вероятность появления только одного события, т.е. появление двух или более событий за малый промежуток времени практически невозможно.

Название "простейший" связано с тем, что процессы, связанные с простейшими потоками, имеют наиболее простое математическое описание. Вероятность появления m событий за время τ для такого потока определяется формулой Пуассона:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$$

/ λ - интенсивность потока, т.е. среднее число событий, приходящееся на единицу времени/.

В частности, вероятность того, что участок окажется пустым, равна

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

Рассмотрим случайную величину T - промежуток времени между произвольными двумя соседними событиями - и найдём её функцию распределения $F(t) = P(T \leq t)$.

Перейдём к вероятности противоположного события $P(T > t) = 1 - F(t)$. Это есть вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного события, она равна $P_0(t) = e^{-\lambda t}$. Поэтому $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, а плотность распределения $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, т.е. случайная величина T распределена по показательному закону с параметром λ. Таким образом, промежуток времени T между соседними событиями в простейшем потоке распределён по показательному закону;

$$MT = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}.$$

3. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Системой массового обслуживания /СМО/ называется любая :истема, предназначенная для обслуживания каких-либо заявок, юступающих в неё в случайные моменты времени. Примерами та-:их систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастер-:кие, билетные кассы, справочные бюро, магазины, парикмахерские т.п.

Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих диниц /или "приборов"/, которые мы будем называть каналами бслуживания. Каналами могут быть: линии связи, рабочие точки, ассиры, продавцы, лифты, автомашины и др. СМО могут быть дноканальными и многоканальными.

Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то отока заявок /или "требований"/, поступающих в какие-то лучайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается акое-то, вообще говоря, случайное время $t_{об}$, после чего анал освобождается и готов к приёму следующей заявки.

Случайный характер потока заявок и времён обслуживания риводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО капливается излишне большое число заявок /они либо становят-я в очередь, либо покидают СМО необслуженными/; в другие же эриоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще проста-вать.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние ЛО меняется скачком в моменты появления каких-то событий или прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или мо-энта, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь/.

Предмет теории массового обслуживания - построение мате-атических моделей, связывающих заданные условия работы СМО число каналов, их производительность, правила работы, характер тока заявок/ с интересующими нас характеристиками - показа-элями эффективности СМО, описывающими, с той или другой точки рения, её способность справляться с потоком заявок. В качестве аких показателей /в зависимости от обстановки и целей иссле-вания/ могут применяться разные величины, например: среднее сло заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени; среднее чис-занятых каналов; среднее число заявок в очереди и среднее емя ожидания обслуживания; вероятность того, что число зая-к в очереди превысит какое-то значение, и т.д.

Математический анализ работы СМО очень облегчается, если оцесс этой работы - марковский. Для этого достаточно, чтобы е потоки событий, переводящие систему из состояния в состо-ие /потоки заявок, потоки "обслуживаний/, были простейшими.

4. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ. ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

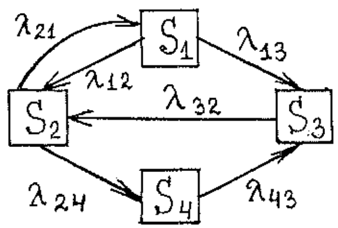
Рассматривая марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, удобно представлять, что все переходы системы S из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий /поток вызовов, поток отказов и т.д./. Если все потоки простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет марковским.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой - так называемым графом состояний. Состояния системы изображаются прямоугольниками, а возможные переходы из состояния в состояние - стрелками, соединяющими состояния.

Возле каждой стрелки проставляется интенсивность того потока событий, который переводит систему по данной стрелке. Обозначим через λ_{ij} интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния S_i в S_j.

Имея в своём распоряжении размеченный граф состояний системы, легко построить математическую модель данного процесса.

Рассмотрим конкретный пример.



Пусть система имеет четыре состояния: S_1, S_2, S_3, S_4.

Обозначим через $p_i(t)$ вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i.

Рассмотрим одну из них, например $p_1(t)$. Это вероятность того, что в момент t система будет в состоянии S_1. Придадим t малое приращение Δt и найдём $p_1(t+\Delta t)$ - вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система будет в состоянии S_1.
Это может произойти в двух случаях:

1/либо в момент t система уже была в состоянии S_1, а за время Δt не вышла из него;

2/либо в момент t система была в состоянии S_2, а за время Δt перешла из него в S_1.

Вероятности двух и более переходов за время Δt есть $o(\Delta t)$.

Найдём вероятность первого варианта. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S_1, равна $p_1(t)$. Эту вероятность нужно умножить на вероятность того, что за время Δt система не перейдёт из S_1 ни в S_2, ни в S_3. Эти вероятности соответственно равны $e^{-\lambda_{12}\Delta t}$ и $e^{-\lambda_{13}\Delta t}$. Поскольку $e^{-\lambda_{12}\Delta t}=1-\lambda_{12}\Delta t+o(\Delta t)$, $e^{-\lambda_{13}\Delta t}=1-\lambda_{13}\Delta t+o(\Delta t)$, то вероятность первого варианта равна

$$p_1(t)[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t]+o(\Delta t).$$

Найдём вероятность второго варианта. Она равна вероятности того, что в момент t система будет в состоянии S_2, а за время Δt перейдёт из него в состояние S_1. Вероятность последнего события равна $1-e^{-\lambda_{21}\Delta t}=\lambda_{21}\Delta t+o(\Delta t)$. Поэтому вероятность второго варианта равна

$$p_2(t)\lambda_{21}\Delta t+o(\Delta t).$$

Складывая вероятности обоих вариантов, получим

$$p_1(t+\Delta t)=p_1(t)[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t]+p_2(t)\lambda_{21}\Delta t+o(\Delta t).$$

Отсюда

$$\frac{p_1(t+\Delta t)-p_1(t)}{\Delta t}=\lambda_{21}p_2(t)-(\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=\lambda_{21}p_2(t)-(\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1(t).$$

Рассуждая аналогично для всех остальных состояний, получим следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases}\dfrac{dp_1}{dt}=\lambda_{21}p_2-(\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1\\ \dfrac{dp_2}{dt}=\lambda_{12}p_1+\lambda_{32}p_3-(\lambda_{24}+\lambda_{21})p_2\\ \dfrac{dp_3}{dt}=\lambda_{13}p_1+\lambda_{43}p_4-\lambda_{32}p_3\\ \dfrac{dp_4}{dt}=\lambda_{24}p_2-\lambda_{43}p_4\end{cases}$$

аргумент t у функций $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ для краткости не пишем /.

К системе нужно добавить очевидное соотношение

$$p_1+p_2+p_3+p_4=1$$

- в любой момент времени система находится в одном из своих состояний.

Следует также задать начальные условия. Например, если точно известно, что в начальный момент система находилась в состоянии S_i, то надо положить $p_i(0)=1$, а остальные вероятности в начальный момент равны нулю.

Полученную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно решать аналитически, а если уравнений много - численно на ЭВМ.

Таким образом, уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени.

Обратим внимание на структуру уравнений Колмогорова. Все они строятся по вполне определённому правилу, которое можно сформулировать следующим образом. В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности какого-то состояния. В правой части - сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного состояния.

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно за конечное число шагов перейти в любое другое, то существуют предельные вероятности при $t\to\infty$. Они называются финальными.

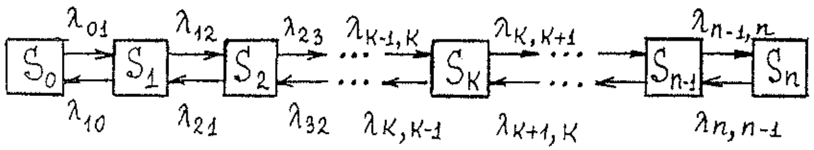
Финальную вероятность состояния S_i можно истолковать как среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.

Поскольку в предельном состоянии все вероятности постоянны, то их можно найти из системы уравнений Колмогорова, положив все производные равными нулю. В этом случае система дифференциальных уравнений превратится в систему линейных алгебраических уравнений.

5. СХЕМА ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ. ФОРМУЛЫ ЛИТТЛА

В различных задачах теории массового обслуживания очень часто встречается так называемая схема гибели и размножения.

Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет вид, показанный на рисунке:



Особенность этого графа в том, что все состояния системы можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний / S_1, S_2, ... S_{n-1} / связано прямой и обратной стрелкой с каждым из соседних состояний - правым и левым, а крайние состояния / S_0, S_n / - только с одним соседним состоянием.

Термин "схема гибели и размножения" ведёт начало от биологических задач, где подобной схемой описывается изменение численности популяции.

Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, - простейшие /для краткости будем называть и систему S и протекающий в ней процесс - простейшими /.

Пользуясь графом, составим и решим систему алгебраических уравнений для финальных вероятностей состояний /их существование вытекает из того, что из каждого состояния можно перейти в каждое другое, и число состояний конечно/. Имеем

$$\begin{cases} 0=\lambda_{10}p_1-\lambda_{01}p_0 \\ 0=\lambda_{01}p_0+\lambda_{21}p_2-(\lambda_{10}+\lambda_{12})p_1 \\ 0=\lambda_{12}p_1+\lambda_{32}p_3-(\lambda_{21}+\lambda_{23})p_2 \\ \dots \\ 0=\lambda_{n-2,n-1}p_{n-2}+\lambda_{n,n-1}p_n-(\lambda_{n-1,n-2}+\lambda_{n-1,n})p_{n-1} \\ 0=\lambda_{n-1,n}p_{n-1}-\lambda_{n,n-1}p_n \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $\lambda_{10}p_1=\lambda_{01}p_0 \quad (*)$.

Из второго, с учётом $(*)$, получаем $\lambda_{21}p_2=\lambda_{12}p_1 \ (**)$.

Из третьего, с учётом $(**)$, получаем $\lambda_{32}p_3=\lambda_{23}p_2$.

И вообще $\lambda_{k,k-1}p_k=\lambda_{k-1,k}p_{k-1}$, $k=0,1,\dots n$.

Итак, финальные вероятности $p_0, p_1, \dots, p_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \lambda_{10}p_1=\lambda_{01}p_0 \\ \lambda_{21}p_2=\lambda_{12}p_1 \\ \dots \\ \lambda_{k,k-1}p_k=\lambda_{k-1,k}p_{k-1} \\ \dots \\ \lambda_{n,n-1}p_n=\lambda_{n-1,n}p_{n-1} \end{cases}$$

Кроме того, надо учесть нормировочное условие

$$p_0+p_1+p_2+\dots+p_n=1$$

Решим эту систему уравнений.

Из первого уравнения получим $p_1=\dfrac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0 \quad (*)$.

Из второго, с учётом $(*)$, получим $p_2=\dfrac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0 \ (**)$.

Из третьего, с учётом $(**)$, получим $p_3=\dfrac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0$.

И вообще $p_k=\dfrac{\lambda_{k-1,k}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0$, $k=1,\dots n$.

Таким образом, все вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_n$ выражены через одну из них (p_0). Подставим эти выражения в нормировочное условие. Получим, вынося за скобку p_0:

$$p_0\left(1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}+\dots+\frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)=1$$

Отсюда получим выражение для p_0:

$$p_0=\left(1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{n-1,n}\dots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\dots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}$$

Все остальные вероятности выражаются через p_0.

Теперь выведем очень важные формулы Литтла.

Рассмотрим любую СМО /одноканальную, многоканальную, марковскую, немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью/ и связанные с нею два потока событий: поток заявок, прибывающих в СМО, и поток заявок, покидающих СМО.

Если в системе установился предельный, стационарный режим, то среднее число заявок, прибывающих в СМО за единицу времени, равно среднему числу заявок, покидающих её; оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Первая формула Литтла связывает среднее число заявок $L_{сист}$, находящееся в системе массового обслуживания /т.е. обслуживаемых или стоящих в очереди/ и среднее время пребывания заявки в системе $W_{сист}$:

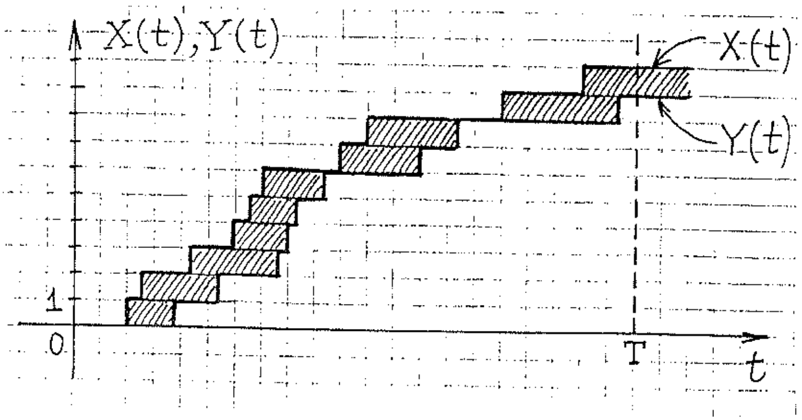
$$\boxed{W_{сист.} = \frac{1}{\lambda} L_{сист.}}$$

Вторая формула Литтла связывает среднее число заявок в очереди $L_{оч.}$ и среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч}$:

$$\boxed{W_{оч.} = \frac{1}{\lambda} L_{оч.}}$$

Обозначим: $X(t)$ - число заявок, прибывших в СМО до момента t, $Y(t)$ - число заявок, покинувших СМО до момента t. И та, и другая функции являются случайными и меняются скачком /увеличиваются на единицу/ в моменты приходов заявок $(X(t))$ и уходов заявок $(Y(t))$.

Вид функций $X(t)$ и $Y(t)$ показан на рисунке; обе линии - ступенчатые, верхняя - $X(t)$, нижняя - $Y(t)$. Очевидно, что для любого момента t их разность $Z(t) = X(t) - Y(t)$ есть не что иное, как число заявок, находящихся в СМО. Когда линии $X(t)$ и $Y(t)$ сливаются, в системе нет заявок.



Рассмотрим очень большой промежуток времени T /мысленно продолжив график далеко за пределы чертежа/ и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО.

Оно будет равно интегралу от функции $Z(t)$ на этом промежутке, делённому на длину интервала T:

$$L_{сист} = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)\,dt$$

Но этот интеграл представляет собой не что иное, как площадь фигуры, заштрихованной на рисунке. Эта фигура состоит из прямоугольников, каждый из которых имеет высоту, равную единице, и основание, равное времени пребывания в системе соответствующей заявки /первой, второй и т.д./. Обозначим эти времена $t_1, t_2, \ldots$ Правда, под конец промежутка T некоторые прямоугольники войдут в заштрихованную фигуру не полностью, а частично, но при достаточно большом T это не будет играть роли. Таким образом, можно считать, что

$$\int_0^T Z(t)\,dt = \sum_i t_i,$$

где сумма распространяется на все заявки, пришедшие за время T.

Получаем

$$L_{сист} = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)\,dt = \frac{1}{T}\sum_i t_i = \lambda \cdot \frac{1}{T\lambda}\sum_i t_i$$

Но величина $T\lambda$ есть не что иное, как среднее число заявок, пришедшее за время T. Если мы разделим сумму всех времён $\sum_i t_i$ на среднее число заявок $T\lambda$, то получим среднее время пребывания заявки в системе $W_{сист}$.

Итак, $L_{сист} = \lambda W_{сист}$, откуда $W_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист}$ - это первая формула Литтла.

Для вывода второй формулы Литтла достаточно вместо нижней линии на рисунке взять функцию $U(t)$ - количество заявок, ушедших до момента t не из системы, а из очереди / если заявка, пришедшая в систему, не становится в очередь, а сразу идёт под обслуживание, можно всё же считать, что она становится в очередь, но находится в ней нулевое время / .

6. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим некоторые простейшие СМО и выведем выражения для их характеристик /показателей эффективности/.

Все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, будем считать простейшими. В их числе будет и так называемый "поток обслуживаний". Под ним разумеется поток заявок, обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом. В этом потоке интервал между событиями, как и всегда в простейшем потоке, имеет показательное распределение.

Характеристики эффективности рассматриваемых СМО будем вводить по ходу изложения.

I n-канальная СМО с отказами /задача Эрланга/.

Рассмотрим одну из первых задач теории массового обслуживания. Эта задача возникла при эксплуатации телефонных линий и была решена в начале нашего века датским математиком Эрлангом.

Задача ставится так: имеется n каналов /линий связи/, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ /величина, обратная среднему времени обслуживания $t_{об}$ /. Найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики её эффективности:

A - абсолютную пропускную способность, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q - относительную пропускную способность, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{отк}$ - вероятность отказа, т.е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;

$\bar{k}$ - среднее число занятых каналов.

Состояния системы S /СМО/ будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе /в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов/:

S_0 - в СМО нет ни одной заявки,

S_1 - в СМО находится одна заявка /один канал занят, остальные свободны/,

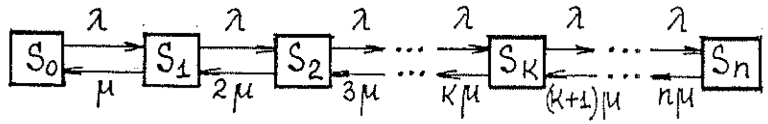
. . . .

S_k - в СМО находится k заявок / k каналов заняты, остальные свободны/,

. . . .

S_n - в СМО находится n заявок / все n каналов заняты/.

Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения:



Разметим этот граф - проставим у стрелок интенсивности потоков событий. Из S_0 в S_1 систему переводит поток заявок с интенсивностью λ /как только приходит заявка, система перескакивает из S_0 в S_1 /. Тот же поток заявок переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое /см. верхние стрелки на рисунке/.

Проставим интенсивности у нижних стрелок. Пусть система находится в состоянии S_1 /работает один канал/. Он производит μ обслуживаний в единицу времени. Проставляем у стрелки $S_1 \xrightarrow{\mu} S_0$ интенсивность μ. Теперь представим себе, что система находится в состоянии S_2 /работают два канала/. Чтобы ей перейти в S_1, нужно, чтобы либо закончил обслуживание первый канал, либо второй; суммарная интенсивность их потоков обслуживаний равна 2μ; проставляем её у соответствующей стрелки. Суммарный поток обслуживаний, даваемый тремя каналами, имеет интенсивность 3μ, k каналами - $k\mu$. Проставляем эти интенсивности у нижних стрелок на рисунке.

А теперь, зная все интенсивности, воспользуемся уже готовыми формулами для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения. Получим

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2\cdot 3\mu^3} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0;$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0;$$

$$\ldots$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0;$$

$$\ldots$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0.$$

Заметим, что в эти формулы интенсивности λ и μ входят не по отдвльности, а только в виде отношения λ / μ.
Обозначим $\lambda / \mu = \rho$ и будем называть величину ρ "приведённой интенсивностью потока заявок". Её смысл - среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки. Пользуясь этим обозначением, перепишем полученные формулы в виде:

$$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^k}{k!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1};$$

$$p_1=\rho p_0;\ p_2=\frac{\rho^2}{2!}p_0;\ldots p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0;\ldots p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0$$

- это формулы Эрланга.

Таким образом, финальные вероятности найдены. По ним мы вычислим характеристики эффективности СМО. Сначала найдём $P_{отк}$ - вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ /не будет обслужена/. Для этого нужно, чтобы все n каналов были заняты; значит,

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0.$$

Отсюда находим относительную пропускную способность - вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1-P_{отк} = 1-\frac{\rho^n}{n!}p_0$$

Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:

$$A=\lambda Q = \lambda\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right)$$

Осталось только найти среднее число занятых каналов $\overline{k}$. Эту величину можно было бы найти как математическое ожидание дискретной случайной величины с возможными значениями 0, 1, ... n и вероятностями этих значений $p_0, p_1, \ldots p_n$:

$$\overline{k} = 0\cdot p_0 + 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + \ldots + n\,p_n.$$

Но мы найдём $\overline{k}$ гораздо проще. В самом деле, нам известна абсолютная пропускная способность A. Это - не что иное, как интенсивность потока обслуженных системой заявок. Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок. Значит, среднее число занятых каналов равно

$$\overline{k} = A/\mu$$

Подставляя сюда полученное выше выражение для A, получим:

$$\overline{k} = \rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right)$$

Пример.

На вход одноканальной СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания - показательное с параметром μ. Найти характеристики эффективности СМО.

Решение. Пусть $\lambda / \mu = \rho$. Тогда

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho};\ p_1 = \frac{\rho}{1+\rho};\ P_{отк} = p_1 = \frac{\rho}{1+\rho};$$

$$Q = 1-P_{отк} = \frac{1}{1+\rho};\ A=\lambda Q=\frac{\lambda}{1+\rho};\ \overline{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Пример.

Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток вызовов с интенсивностью $\lambda = 0{,}4$ вызов/мин. Средняя продолжительность разговора $\overline{t}_{об} = 3$ мин; время разговора имеет показательное распределение. Найти характеристики эффективности СМО. Сравнить пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы разговор длился в точности 3 мин., а заявки шли одна за другой регулярно, без перерыва.

Решение: $\mu = 1/\overline{t}_{об} = 1/3;\ \rho = \lambda/\mu = 1{,}2;$

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho} = 0{,}455;\ p_1 = 0{,}545;\ P_{отк} = 0{,}545;$$

$$Q = 0{,}455;\ \underline{\underline{A = 0{,}182}};\ \overline{k} = 0{,}546$$

Если бы заявки шли регулярно, без перерывов, то за каждую минуту обслуживалась бы ровно третья часть заявки, т.е.

$$\underline{\underline{A_{ном} = 0{,}333}}$$

Пример.

Имеется станция связи с тремя каналами/ $n = 3$ / , интенсивность потока заявок $\lambda = 1,5$ /заявки в минуту/, среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}_{об} = 2$ мин.

Все потоки событий - простейшие. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности.

Решение: $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 0,5$; $\rho = \lambda/\mu = 3$;

$$p_0 = \left[1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right]^{-1} = 1/13;$$

$$p_1 = 3/13; \; p_2 = p_3 = 9/26 = 0,346;$$

$$P_{отк} = 0,346; \; Q = 0,654; \; A = 0,981; \; \bar{K} = 1,96$$

Пример.

Имеется двухканальная СМО с отказами. На её вход поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}_{об} = 0,8$ час.

Каждая обслуженная заявка приносит доход 4 тыс.руб. Содержание каждого канала обходится в две тыс.руб./час.

Решить: выгодно или нет увеличить число каналов СМО до трёх?

Решение. Имеем $\mu = 1/0,8 = 1,25$; $\rho = \lambda/\mu = 3,2$.

Пусть $n = 2$. Тогда

$$p_0 = \left[1 + 3,2 + \frac{3,2^2}{2}\right]^{-1} = 0,107;$$

$$p_2 = 0,55; \; Q = 0,45; \; A = 1,8.$$

Доход равен $4 \cdot 1,8 = 7,2$ тыс.руб./час.

Теперь пусть $n = 3$. Тогда

$$p_0 = \left[1 + 3,2 + \frac{3,2^2}{2} + \frac{3,2^3}{3!}\right]^{-1} = 0,068;$$

$$p_3 = 0,37; \; Q = 0,63; \; A = 2,52.$$

Доход равен $4 \cdot 2,52 = 10,1$ тыс.руб./час.

Таким образом, увеличение дохода составит $10,1 - 7,2 = 2,9$ тыс.руб./час., увеличение расхода 2 тыс.руб. в час. Значит, выгодно увеличить число каналов СМО до трёх.

2 Одноканальная СМО с неограниченной очередью.

Пусть имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений /ни по длине очереди, ни по времени ожидания/. На эту СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ ; поток обслуживаний имеет интенсивность μ , обратную среднему времени обслуживания $\bar{t}_{об}$. Требуется найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики её эффективности:

$L_{сист}$ - среднее число заявок в системе;

$W_{сист}$ - среднее время пребывания заявки в системе;

$L_{оч}$ - среднее число заявок в очереди;

$W_{оч}$ - среднее время пребывания заявки в очереди;

$P_{зан}$ - вероятность того, что канал занят /степень загрузки канала/.

Что касается абсолютной пропускной способности A и относительной Q , то вычислять их нет надобности: в силу того, что очередь неограничена, каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому $A = \lambda$; по той же причине $Q = 1$.

Состояния системы, как и раньше, будем нумеровать по числу заявок, находящихся в СМО:

S_0 - канал свободен;

S_1 - канал занят /обслуживает заявку/, очереди нет;

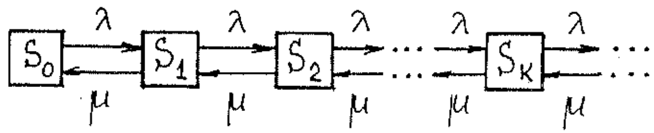
S_2 - канал занят, одна заявка стоит в очереди;

....

S_k - канал занят, $(k-1)$ заявок стоят в очереди;

....

Теоретически число состояний ничем не ограничено /бесконечно/. Граф состояний имеет вид, показанный на рисунке:



Это - схема гибели и размножения с бесконечным числом состояний. По всем стрелкам поток заявок с интенсивностью λ переводит систему слева направо, а справа налево - поток обслуживаний с интенсивностью μ .

Формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения выводились нами только для случая конечного числа состояний. Эти формулы остаются верными и для бесконечного числа состояний, но при дополнительном условии $\rho < 1$. Имеем

$$p_0 = (1+\rho+\rho^2+...+\rho^K+...)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1-\rho;$$

$$p_1 = \rho(1-\rho);\ p_2 = \rho^2(1-\rho);\ ...\ p_K = \rho^K(1-\rho);\ ...$$

Найдём среднее число заявок в СМО:

$$L_{сист} = \sum_{K=0}^{\infty} K p_K = \sum_{K=0}^{\infty} K \rho^K (1-\rho) =$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{K=1}^{\infty} K\rho^{K-1} = \rho(1-\rho)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^K =$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{K=1}^{\infty}\rho^K = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) =$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} \Rightarrow \boxed{L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

Теперь по формуле Литтла найдём среднее время пребывания заявки в системе: $\boxed{W_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}}$

Найдём среднее число заявок под обслуживанием:

$$L_{об} = 1 \cdot P_{зан} + 0 \cdot P_{своб} = P_{зан} = 1 - p_0 = \rho$$

Отсюда среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho \Rightarrow \boxed{L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}}$$

По формуле Литтла найдём среднее время пребывания заявки в очереди: $\boxed{W_{оч.} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}}$

Таким образом, все характеристики эффективности СМО найдены.

Пример.

Система массового обслуживания - билетная касса с одним окошком и неограниченной очередью. Касса продаёт билеты в пункты А и В. Пассажиров, желающих купить билет в пункт А, приходит в среднем трое за 20 минут, в пункт В - двое за 20 минут. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трёх пассажиров за 10 минут. Время обслуживания - показательное. Вычислить финальные вероятности и характеристики эффективности СМО.

Решение: Имеем

$\lambda_A = 3/20 = 0{,}15$ заявки/мин.

$\lambda_B = 2/20 = 0{,}10$ заявки/мин.

Общая интенсивность потока заявок

$\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 0{,}25$ заявки/мин.

Далее, $\bar{t}_{об} = 10/3 \Rightarrow \mu = 1/\bar{t}_{об} = 0{,}3$ заявки/мин.

Поскольку $\rho = \lambda / \mu = 0{,}833 < 1$, то существуют финальные вероятности:

$p_0 = 1-\rho = 0{,}167;$

$p_K = \rho^K(1-\rho) = 0{,}833^K \cdot 0{,}167;$

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}833}{0{,}167} = 4{,}99;$$

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}833^2}{0{,}167} = 4{,}16;$$

$$W_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = 20{,}0\ (мин);$$

$$W_{оч} = \frac{L_{оч.}}{\lambda} = 16{,}6\ (мин.)$$

Пример.

Железнодорожная сортировочная горка, на которую подаётся простейший поток составов с интенсивностью $\lambda = 2$ состава в час, представляет собой одноканальную СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания состава на горке имеет показательное распределение со средним значением $\bar{t}_{об} = 20$ мин. Найти среднее число составов, связанных с горкой / $L_{сист}$ /, среднее число составов в очереди / $L_{оч}$ /, среднее время пребывания состава в СМО / $W_{сист}$ /, среднее время пребывания состава в очереди / $W_{оч}$ /.

Решение: $\bar{t}_{об} = 1/3$ (час.); $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 3$; $\rho = 2/3$;

$$p_0 = \frac{1}{3}; \quad p_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3};$$

$$L_{сист} = 2; \quad L_{оч} = 4/3;$$

$$W_{сист} = 1 \text{ (час)}; \quad W_{оч.} = 2/3 \text{ (час.)}.$$

Пример.

Условия предыдущей задачи осложняются тем, что в парке прибытия сортировочной горки могут находиться одновременно не более трёх составов /включая обслуживаемый/. Если состав прибывает в момент, когда в парке прибытия уже находятся три состава, он вынужден ожидать своей очереди на внешних путях. За один час пребывания состава на внешних путях станция платит штраф a руб. Определить средний суточный штраф, который придётся уплатить за ожидание составов на внешних путях.

Решение. Вычислим среднее число составов, находящихся на внешних путях:

$$L_{внешн.} = \sum_{k=4}^{\infty}(k-3)p_k = \rho^3 \sum_{m=1}^{\infty} m p_m = \rho^3 L_{сист} = \frac{16}{27}.$$

По формуле Литтла среднее время, проводимое одним составом на внешних путях, равно $W_{внешн} = \frac{1}{\lambda} L_{внешн} = 0{,}296.$

За сутки /24 часа/ на станцию приходит в среднем $24\lambda = 48$ составов.

Средний суточный штраф составляет

$$48 \cdot 0{,}296\, a = 14{,}2\, a$$

3) Одноканальная СМО с ограниченной очередью.

Пусть число заявок в очереди ограничено /не может превосходить некоторого заданного m /. Если новая заявка приходит в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной /получает отказ/.

Нумерация состояний - по числу заявок, находящихся в СМО:

S_0 - канал свободен;

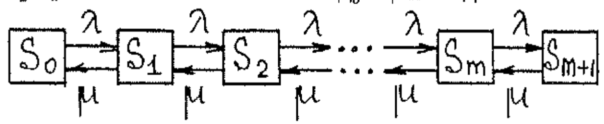
S_1 - канал занят /обслуживает заявку/, очереди нет;

S_2 - канал занят, одна заявка стоит в очереди;

....

S_{m+1} - канал занят, m заявок стоит в очереди.

Граф состояний имеет следующий вид:



Финальные вероятности существуют при любом ρ. При $\rho \neq 1$

$$p_0 = [1+\rho+\dots+\rho^{m+1}]^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}; \quad p_k = \rho^k p_0, \; k = 1, \dots, m+1.$$

При $\rho = 1$ имеем $p_0 = p_1 = \dots = p_{m+1} = 1/(m+2)$.

Характеристики эффективности: вероятность отказа $P_{отк} = p_{m+1}$; вероятность того, что канал занят, $P_{зан} = 1 - p_0$; среднее число занятых каналов $\bar{k} = P_{зан} = 1 - p_0$; относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк}$; абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q$.

Найдём среднюю длину очереди. При $\rho \neq 1$

$$L_{оч} = \sum_{k=0}^{m} k\rho^{k+1} p_0 = \rho^2 p_0 \sum_{k=1}^{m} \frac{d}{d\rho}\rho^k =$$

$$= \rho^2 p_0 \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho - \rho^{m+1}}{1-\rho}\right) = \rho^2 p_0 \frac{[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho)^2}$$

При $\rho = 1$ имеем $L_{оч} = \sum_{k=0}^{m} k p_0 = \frac{1}{2} p_0 m(m+1)$.

Наконец, $L_{сист} = L_{оч} + \bar{k}$;

$$W_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч}; \quad W_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист}$$

Пример.

Подсчитать характеристики эффективности для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди / $m = 3$ / при условии $\lambda = 4$ заявки в час, $\bar{t}_{об} = 1/\mu = 0,5$.

Выяснить, как эти характеристики изменятся, если увеличить число мест в очереди до $m = 4$.

Решение: $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 2$; $\rho = \lambda/\mu = 2$;

1/ $m = 3$

$$p_0 = [1+2+2^2+2^3+2^4]^{-1} = 1/31;$$

$$p_1 = 2/31;\ p_2 = 4/31;\ p_3 = 8/31;\ p_4 = 16/31;$$

$$P_{отк} = 16/31 = 0,52;\ \bar{K} = 30/31 = 0,97;$$

$$Q = 0,48;\ A = 1,92;$$

$$L_{оч.} = 2,19;\ L_{сист} = 3,16;$$

$$W_{оч.} = 0,55\ (час);\ W_{сист} = 0,79\ (час)$$

2/ $m = 4$

$$p_0 = [1+2+2^2+2^3+2^4+2^5]^{-1} = 1/63;$$

$$p_1 = 2/63;\ p_2 = 4/63;\ p_3 = 8/63;\ p_4 = 16/63;\ p_5 = 32/63;$$

$$P_{отк} = 32/63 = 0,51;\ \bar{K} = 62/63 = 0,98;$$

$$Q = 0,49;\ A = 1,96;$$

$$L_{оч} = 3,11;\ L_{сист} = 4,09;$$

$$W_{оч} = 0,78\ (час);\ W_{сист} = 1,02\ (час)$$

4 n-канальная СМО с неограниченной очередью.

Нумерация состояний - по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 - в СМО заявок нет /все каналы свободны/;

S_1 - занят один канал, остальные свободны;

S_2 - занято два канала, остальные свободны;

....

S_K - занято K каналов, остальные свободны;

....

S_n - заняты все n каналов /очереди нет/;

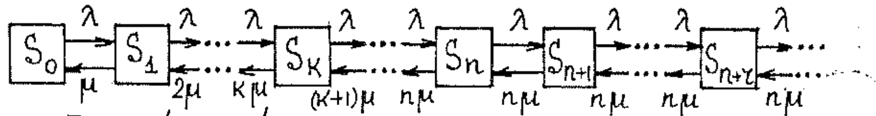
S_{n+1} - заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

....

S_{n+r} - заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди;

....

Граф состояний показан на рисунке:



При $\rho/n < 1$ существуют финальные вероятности:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu \cdot 2\mu} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu \cdot \ldots \cdot n\mu} + \frac{\lambda^{n+1}}{\mu \cdot \ldots \cdot (n\mu)^2} + \ldots + \frac{\lambda^{n+r}}{\mu \cdot \ldots \cdot (n\mu)^{r+1}} + \ldots\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,n} + \ldots + \frac{\rho^{n+r}}{n!\,n^r} + \ldots\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \rho + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n} + \ldots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^r + \ldots\right)\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \rho + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho/n}{1 - \rho/n}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \rho + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\right]^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0;\ \ldots\ p_K = \frac{\rho^K}{K!} p_0;\ \ldots\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0;\ \ldots\ p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r\, n!} p_0;\ \ldots$$

Теперь найдём характеристики эффективности СМО.

Из них легче всего находится среднее число занятых каналов $\bar{k} = \lambda/\mu = \rho$ / это вообще справедливо для любой СМО с неограниченной очередью /.

Найдём среднее число заявок в системе $L_{сист}$ и среднее число заявок в очереди $L_{оч}$. Из них легче вычислить второе:

$$L_{оч} = \sum_{r=1}^{\infty} r\, p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r\, n!}\, p_0 =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \sum_{r=1}^{\infty} r \left(\frac{\rho}{n}\right)^{r-1} =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} \alpha^r \left\{ (\alpha = \rho/n) \right\} =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \frac{d}{d\alpha} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha^r = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \frac{1}{(1-\alpha)^2} \Rightarrow \boxed{L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \cdot (1-\rho/n)^2}}$$

Прибавляя к среднему числу заявок в очереди среднее число заявок под обслуживанием /оно же - среднее число занятых каналов/ $\bar{k} = \rho$, получим:

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho$$

Деля выражения для $L_{оч}$ и $L_{сист}$ на λ, по формуле Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч}\ ; \quad W_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист}$$

Пример.

Железнодорожная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются билеты в два пункта: Ленинград и Киев. Потоки пассажиров, приобретающих билеты в Ленинград и Киев - простейшие и одинаковые по интенсивности $\lambda_0 = 0{,}45$ пассажира в минуту. Среднее время обслуживания пассажира /продажи ему билета/ $\bar{t}_{об} = 2$ мин.

Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей /в интересах пассажиров/ сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Ленинград, а во второй - только в Киев. Проверить разумность этого предложения.

Решение.

I/ Вычислим характеристики для двухканальной СМО /существующий вариант/.

Интенсивность потока заявок $\lambda = 2\lambda_0 = 0{,}9$ пасс/мин ; $\mu = I/\bar{t}_{об} = 0{,}5$ пасс/мин; $\rho = \lambda/\mu = I{,}8$; $\rho/n = 0{,}9$.

Так как $\rho/n = 0{,}9 < I$, то существуют финальные вероятности:

$$p_0 = \left[1 + 1{,}8 + \frac{1{,}8^2}{2} \cdot \frac{0{,}9}{1-0{,}9}\right]^{-1} = 0{,}0575;$$

$$L^{(1)}_{оч} = \frac{1{,}8^3 \cdot 0{,}0575}{2 \cdot 2 \cdot 0{,}01} = 8{,}4\ (пасс);\ W^{(1)}_{оч} = \frac{1}{\lambda} L^{(1)}_{оч} = \underline{\underline{9{,}3\ мин.}}$$

2/ Во втором варианте /предлагаемом/ имеем две одноканальные СМО.

Имеем $\rho = \lambda_0/\mu = 0{,}9 < I$.

Финальные вероятности существуют;

$$L^{(2)}_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 8{,}1 (пасс);\ W^{(2)}_{оч} = \frac{1}{\lambda_0} L^{(2)}_{оч} = \underline{\underline{18\ мин.}}$$

Вывод: Рационализаторское предложение нужно отвергнуть, так как в предлагаемом варианте среднее время пребывания пассажира в очереди почти вдвое больше. Это объясняется тем, что, разделив кассу на две специализированные, мы лишили кассиров возможности подменять друг друга.

Пример.

СМО - обувной магазин, в котором каждый покупатель проходит три фазы обслуживания:

1/ примерка и выбор обуви;
2/ уплата денег в кассу;
3/ получение покупки на контроле.

В магазин прибывает простейший поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 45$ человек в час. В отделе примерки имеются четыре стула, занимая которые, покупатели могут самостоятельно выбирать и примерять обувь. Среднее время примерки и выбора обуви - 5 мин. Выбравший обувь покупатель направляется в кассу, где вторично становится в очередь /касса в магазине одна/. Среднее время оплаты товара в кассе - 1 мин. После оплаты покупатель идет на контроль, где становится в новую очередь и получает покупку. На контроле работают три продавца. Среднее время выдачи покупки - 2 мин. Все потоки событий - простейшие.

Найти характеристики эффективности СМО в каждой фазе.

В каком звене и как нужно улучшить обслуживание для того, чтобы сократить затраты времени покупателей?

Решение. Так как все потоки событий - простейшие, то можно рассматривать три последовательные фазы как три отдельные СМО.

Первая фаза: $\lambda = 45$; $n_1 = 4$; $\mu_1 = 12$; $\rho_1 = 3,75$;
$p_0^{(1)} = 0,006$; $L_{оч}^{(1)} = 13,0$; $L_{сист}^{(1)} = 16,8$; $W_{оч}^{(1)} = 17,3$ (мин); $W_{сист}^{(1)} = 22,3$

Вторая фаза: $\lambda = 45$; $n_2 = 1$; $\mu_2 = 60$; $\rho_2 = 0,75$;
$L_{оч}^{(2)} = 2,25$; $L_{сист}^{(2)} = 3$; $W_{оч}^{(2)} = 3$ (мин); $W_{сист}^{(2)} = 4$ (мин)

Третья фаза: $\lambda = 45$; $n_3 = 3$; $\mu_3 = 30$; $\rho_3 = 1,5$;
$p_0^{(3)} = 0,21$; $L_{оч}^{(3)} = 0,2$; $L_{сист}^{(3)} = 1,7$;
$W_{оч}^{(3)} = 0,3$ (мин); $W_{сист}^{(3)} = 2,3$ (мин)

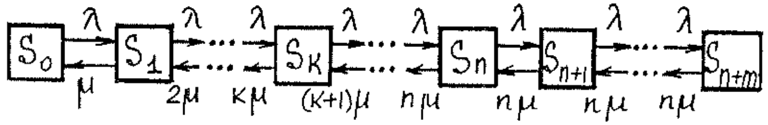
Вывод: Улучшить обслуживание можно, уменьшая время пребывания покупателя в первой фазе, которая представляет собой наиболее слабое звено СМО. Для этого нужно увеличить число стульев в отделе примерки.

5 n-канальная СМО с ограниченной очередью.

Число мест в очереди - m. Нумерация состояний - по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 - в СМО заявок нет /все каналы свободны/;
S_1 - занят один канал, остальные свободны;
S_2 - занято два канала, остальные свободны;
....
S_k - занято k каналов, остальные свободны;
....
S_n - заняты все n каналов /очереди нет/ ;
S_{n+1} - заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;
....
S_{n+m} - заняты все n каналов, m заявок стоит в очереди.

Граф состояний показан на рисунке:



Финальные вероятности существуют при любом ρ/n :

$$p_0 = \left[1 + \rho + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n} + \ldots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)\right]^{-1} =$$

$$= \begin{cases} \left[1 + \rho + \ldots + \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \dfrac{1 - (\rho/n)^m}{1 - \rho/n}\right]^{-1}, & \left(\dfrac{\rho}{n} \neq 1\right); \\ \left[1 + \rho + \ldots + \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^n}{n!}\, m\right]^{-1}, & \left(\dfrac{\rho}{n} = 1\right); \end{cases}$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \le k \le n;$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r\, n!} p_0, \quad 1 \le r \le m.$$

Характеристики эффективности: вероятность отказа $P_{отк} = P_{n+m}$, относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк}$, абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q$, среднее число занятых каналов $\bar{K} = A/\mu$.

Найдём среднюю длину очереди. При $\rho/n \neq 1$

$$L_{оч} = \sum_{k=0}^{m} k \frac{\rho^{n+k}}{n^k n!} p_0 =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \sum_{k=1}^{m} \frac{d}{d\alpha}(\alpha^k) \quad \{(\alpha = \rho/n)\} =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha - \alpha^{m+1}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{(1 + m\alpha^{m+1} - (m+1)\alpha^m)}{(1-\alpha)^2} =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 + m(\rho/n)^{m+1} - (m+1)(\rho/n)^m}{(1-\rho/n)^2}$$

При $\rho/n = 1$ имеем $L_{оч} = \sum_{k=0}^{m} k \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{\rho^n p_0}{n!} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$

Наконец,

$$L_{сист} = L_{оч} + \bar{K};$$

$$W_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч}; \quad W_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист}.$$

Пример.

Подсчитать характеристики эффективности для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди при условии λ = 4 заявки в час, $\bar{t}_{об} = 0,5$ (час).

Выяснить, как эти характеристики изменятся, если увеличить число каналов обслуживания до двух.

Решение: $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 2$; $\rho = \lambda/\mu = 2$;

1/ $n = 1$

$p_0 = 1/31,\ p_1 = 2/31,\ p_{1+1} = 4/31,\ p_{1+2} = 8/31,\ p_{1+3} = 16/31,$

$P_{отк} = 16/31 = 0,52;\ \bar{K} = P_{зан} = 30/31 = 0,97;$

$Q = 0,48;\ A = 1,92;\ L_{оч} = 2,19;\ L_{сист} = 3,16;$

$W_{оч} = 0,55$ (час); $W_{сист} = 0,79$ (час).

2/ $n = 2$

$\rho/n = 1$

$$p_0 = \left[1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^2}{2} 3\right]^{-1} = 1/11;$$

$p_1 = 2/11;\ p_2 = 2/11;$

$p_{2+1} = 2/11;\ p_{2+2} = 2/11;\ p_{2+3} = 2/11;$

$P_{отк} = p_{2+3} = 2/11 = 0,18;\ \bar{K} = 18/11 = 1,64;$

$Q = 1 - P_{отк} = 0,82;\ A = 3,28;$

$L_{оч} = 12/11 = 1,09;\ L_{сист} = L_{оч} + \bar{K} = 2,73;$

$W_{оч} = 0,27$ (час); $W_{сист} = 0,68$ (час)

Пример.

В зубоврачебном кабинете три кресла / n = 3 /, а в коридоре имеются три стула / m = 3 / для ожидания приёма. Поток клиентов - простейший с интенсивностью λ = I2 клиентов в час. Время обслуживания /приёма клиента/ - показательное со средним значением $\bar{t}_{об}$ = 20 мин.

Если все три стула в коридоре заняты, клиент в очередь не становится. Определить среднюю долю обслуживаемых клиентов, среднее число клиентов, обслуживаемых кабинетом за час, среднее число занятых кресел в кабинете, среднее число занятых стульев в коридоре, среднее время, которое клиент проведёт в ожидании приёма в коридоре.

Решение: $\bar{t}_{об}$ = I/3 (час), μ = 3, ρ = I2/3 = 4;

$$p_0 = \left[1+4+\frac{4^2}{2}+\frac{4^3}{6}+\frac{4^4}{3\cdot 6}\cdot\frac{1-(4/3)^3}{1-4/3}\right]^{-1} = 0{,}01218$$

$$p_1 = 4\cdot 0{,}01218 = 0{,}049;\quad p_2 = 8\cdot 0{,}01218 = 0{,}097;$$

$$p_3 = \frac{32}{3}\cdot 0{,}01218 = 0{,}130;$$

$$p_{3+1} = 0{,}173;\quad p_{3+2} = 0{,}231;\quad p_{3+3} = 0{,}307.$$

Средняя доля обслуживаемых клиентов $Q = 1 - p_{3+3} = 0{,}693$

Среднее число клиентов, обслуживаемых кабинетом за час,

$$A = \lambda Q = 8{,}32;$$

Среднее число занятых каналов /кресел/ $\bar{K} = A/\mu = 2{,}77$;

Среднее число занятых стульев в коридоре $L_{оч} = 1{,}56$;

Среднее время, которое клиент проведёт в коридоре,

$$W_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч} = 0{,}13 \text{ (час)}.$$