ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год шестнадцатый

№ 4 (64)

октябрь-декабрь 2012 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения

117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (64), 2012 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2012 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 29.12.2012 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (64), октябрь – декабрь 2012 г.

Содержание

1918 – 1930 гг. Первая коренная реформа русской школы (статья вторая)

И. П. Костенко

После годичного перерыва редакция продолжает публикацию серии статей, посвящённых *проблеме качества* отечественного математического образования. Напомним, что первая статья И. П. Костенко "Динамика качества математического образования. Причины деградации" опубликована в 2011 г., в 58-м номере нашего журнала.

"... худое дерево приносит и плоды худые."
Матф., VII, 17.

Определим основные термины, которые будем использовать в этой и последующих статьях.

Главной характеристикой качества математического образования является качество знаний учащихся и, прежде всего, выпускников общеобразовательной школы. Для количественной оценки этого показателя мы используем процент отличных и хороших отметок проверочных работ (экзаменов, тестов) и называем такую оценку кратко *качеством-1*. Процент отличных, хороших и удовлетворительных отметок, который официально называется "процентом успеваемости", мы называем *качеством-2*. Эти проценты оценивают приближённо, сопоставляя разные данные (результаты массовых официальных контрольных работ, тестов, вступительных экзаменов в вузы, международных исследований, экспертные оценки учителей, методистов, преподавателей высшей школы), и учитывая их согласованность между собой.

Отметим, что в дальнейшем изложении мы будем часто использовать курсив, а также знаки (!) и (?) для выделения важных идей и смыслов (или бессмыслиц).

1920-е – начало 30-х гг. XX в. — это период тотального разрушения русской культуры. Разрушением системы образования занимался Наркомпрос (нарком А. В. Луначарский). Главные установки всех его реформ заложены в 1918 г.

Вот маленькая выписка из протокола №45 заседания 14-20 июля 1918 г. "Тов. Лепешинский[1] оглашает тезисы, выработанные Отделом реформы школы: 1. Учебное время продолжается круглый год; 2. Школьники занимаются 7 дней в неделю; 3. *Учителя должны избегать пользоваться учебниками* ... Крупская: Учебники не должны быть отменены ... . Другое дело — как он будет использован ... . Тов. Полянский: Наша первая задача — *изгнание* (?!) из школы ненужного хлама ... *старая математика и словесность должны быть изгнаны из школы*" [1, с. 99-100].

"Сотрудник Отдела реформы школы Л. Шапиро ... : Мы глубоко опечалены тем, что *наша минно-подрывная работа* идёт недостаточно интенсивно, и зовём всех, в ком жива энергия творческого подъёма, *спешить с разрушением школы*" [там же, с. 100][2].

Официальное указание "учебники вообще должны быть изгнаны из школы" [2, с. 163] было директивно спущено в Циркулярном письме Отдела школ Наркомпроса в августе 1918 г. (заметьте, Крупская была против). Мало кто замечает, что современная (будто бы новая) идея

[1]П. Н. Лепешинский (1868-1944) — зав. отделом реформы школы Наркомпроса, профессиональный революционер, член РСДРП с 1898 г.

[2]Не чувствуется ли здесь перекличка с сегодняшними "реформаторами"? Они не высказываются столь откровенно, но делают то же самое.

“вариативных” учебников преследует ту же цель. Сегодня учебники, в сущности, тоже “изгнаны” из школы, их никто не читает.

Принципы построения новой школы вырабатывались Государственной комиссией по просвещению, которую возглавляли А. В. Луначарский и П. Н. Лепешинский. 16 октября 1918 г. опубликовано “Положение о единой *трудовой* школе Российской Социалистической Федеративной Советской Республики”. Этим “Положением” устанавливалась единая для всех граждан РСФСР школа с 9-летним сроком обучения (1-я ступень — 5 лет, 2-я — 4 года).

Подписал этот документ Председатель ВЦИК Я. М. Свердлов. Им был освящён главный принцип первой советской школьной реформы: “Основой школьной жизни должен служить : производительный общественно-необходимый *труд.* Он должен быть тесно, органически связан с обучением” [3, с. 5].

Но как связать труд с обучением — никто не знал. “В летние каникулы 1919 г. повсеместно проводились летние курсы учителей ... , охватившие почти всё учительство. На этих курсах уяснялось ... понимание нового для всех термина “трудовая школа”, учителя работали в слесарных, столярных мастерских, дебатировали ... возможность и характер сближения школьного преподавания с трудом, с общественной работой” [там же]. Но так ни до чего определённого и не додебатировались.

Другой принцип — борьба с “авторитарной” педагогикой: “учиться надо свободно, без давления”. Наказания нарушителей дисциплины запрещались. “Задавание обязательных работ и уроков на дом не допускается” — так было записано в основополагающем “Положении” 1918 г. [там же, с. 5]. Этим же “Положением” были отменены оценки и экзамены. “Оценка знаний производилась на основании общего впечатления, которое складывалось об ученике у учителя” [там же, с. 15]. Отменены вступительные экзамены в вузы. В конце 1920-х отменили диктант как принудиловку (сегодня отменяют сочинение). Через некоторое время даже лучшие ученики делали по десятку ошибок в изложении. Страна стала безграмотной. Как и сегодня? Сегодня хуже, — 24-25 ошибок в диктанте [4, с. 3].

В 1920-х гг. основным содержанием политики Наркомпроса стало широкомасштабное экспериментаторство, направлявшееся бессодержательной целью построения новой *трудовой* школы. Эта красивая цель прикрывала многие реальные действия, разрушающие качество образования. Проследим, как это делалось в математике.

Общая методическая установка Наркомпроса: “общеобразовательная работа заключается *не в обучении (??), а в решении проблем, выдвигаемых (?) жизнью*” [3, с. 7]. И вот как эта установка конкретизировалась в программах.

1918 г. Примерный план занятий по математике для школ 1-й ступени “*выдвигает на первое место* те главы математики, которые имеют первостепенное значение для решения жизненных вопросов. (?) *Сюда относятся*: арифметические действия над целыми и дробными числами, линейные уравнения, буквенная символика, диаграммы, графики, функциональная зависимость, измерения всякого рода, решение треугольников,...” [там же]. Эта безграмотная фраза — цитата из объяснительной записки к проекту плана занятий[3].

Таким образом, в начальную школу, в которой традиционно изучался один цельный предмет “Арифметика”, вносятся и перемешиваются чужеродные темы: “Элементы *алгебры* начинаются уже во втором и третьем классах, где учащиеся решают *уравнения* по соображению. (?) ... Начиная с третьего года вводятся *графики*, начала линейных *функций*, а в дальнейшем (V класс) и функций вида $y = ax^2$, $y = ax^3$, $y = a\sqrt{x}$. ... В V классе даются элементы *тригонометрии*, проекционного черчения” [там же, с. 6-7].

Помимо огромной перегрузки такой план вёл к хаотизации работы учителя и ученика, к формализму и непрочности не связанных лоскутных знаний. Введение уже на 1-й ступени непосильных для маленьких детей абстракций (уравнения, функции) делало обучение заведомо непонимаемым. В сущности, проект “вынуждает *устранить* из школы математику как учебный предмет” [там же].

[3]Через 18 лет, в 1936 г. в Резолюции Группы математики АН СССР по школе мы встретимся с такими же безграмотными фразами и с *точно* такими же словесными штампами (здесь они выделены курсивом).

“Существовал проект программ и для второй ступени, который включал в себя элементы *аналитической геометрии и анализа*, куда входили такие разделы, как производная, дифференциал, интеграл, ряды Тейлора и Маклорена, признак сходимости Д’Аламбера, теория конических сечений, дифференциальные уравнения” [там же].

В 1920 г. на 1-й Всероссийской конференции школьных подотделов были *приняты* программы по математике для школ 1-й и 2-й ступени. Здесь принцип связи обучения с жизнью получил дальнейшее развитие. Во вводной статье к первому выпуску этих программ авторы пишут: “*Необходимо* (?) стремиться к тому, чтобы ни одно сведение по математике не было даваемо учащемуся без конкретного указания на его практическое применение в науке и технике, более того, без практического применения его на деле тут же в школе” [там же, с. 9].

Интересно, представляли ли себе сами “реформаторы”, как *каждое* “сведение по математике” можно “применить на деле тут же, в школе”? Ясно, что нет, ибо то, что они декларировали, осуществить на деле невозможно в принципе, Но тогда как понимать их декларации? Как сознательный обман? С какой целью? С целью разрушения?

Чтобы заблокировать критическое осмысление новых установок, “реформаторы” подключают эмоциональные образы: “Слишком *закоснели* в нас старые привычки и *старый* взгляд на вопросы математического образования” [там же, с. 9]. Тем самым, актуализируют в общественном сознании политическую идеологему: “всё старое (дряхлое, отжившее) плохо, всё новое (свежее, передовое, революционное) хорошо”. Метод, который будут применять все последующие “реформаторы”: “Киселёв устарел” и пр. В чём же состоял их “новый взгляд”?

В чем же состоял их “новый взгляд”? Цитируем: “Мы предполагаем ... *пересмотреть* ... содержание школьного курса. ... из него *должны быть выкинуты* целые главы и их отдельные части ... С другой стороны, никак нельзя (?) обойти в школе и не познакомить (?) учащихся с такими исключительно важными методами математического исследования, как основы анализа бесконечно-малых или аналитическая геометрия. ... В общеобразовательной школе *не может* (?) *быть проводимо резких границ между отдельными математическими дисциплинами, и они не должны изучаться последовательно*, как это имело место в старой школе. Наоборот, между ними должна быть с самого начала самая тесная связь” [там же, с. 9, 10].

То есть, должна быть разрушена выверенная долгой школьной практикой *система* изучения основ математики. Из неё должны быть “выкинуты целые главы”, добавлены огромные куски высшей математики и всё это *беспорядочно* перемешано. Декларация о том, что “между ними должна быть самая тесная связь” не реализуема в принципе, что доказала практика в 1920-х и в 1970-х гг.

Добавим ещё несколько примеров методических инноваций:

“Курс алгебры должен *обогатиться* такими *общими понятиями*, которые необходимы каждому (?) для установления правильного отношения (?) к окружающему миру, познакомить с *общими* научными методами, приложимыми к чрезвычайно разнообразным явлениям” [там же, с. 10]. “По геометрии авторы призывают *порвать с традицией* ... с её *старой* схемой изложения в виде теоремы, доказательства, следствия ... Характер изложения курса ... должен базироваться: не только и не столько на *старой* последовательности эвклидизированных доказательств, а больше на ряде вновь вводимых *идей: симметрия, движение* и т. д.” [там же, с. 11].

Опять противопоставление “нового” “старому”. Традиция — это уже потому плохо, что “старо”. А новое “обогащает”. Слова-образы, воздействующие на подсознание и блокирующие критическое осмысление. Приём, который “реформаторы” будут использовать всегда. И мы это много раз увидим.

Здесь надо обратить внимание на безграмотность и бессмысленность языка и аргументации. Как это математические понятия могут “установить правильные отношения *каждого* к окружающему миру”? Как “характер изложения” может “базироваться” на идеях? Такие выражения свидетельствуют не только о языковой и культурной безграмотности авторов, но и о бессмысленности их реформаторских идей, которые даже невозможно внятно изложить и оправдать.

Посмотрите, как они оправдывают необходимость введения в школу *общих*, т.е. самых абстрактных научных методов, — потому что они приложимы ко многим явлениям. Но "приложимость" не может быть разумным основанием для введения этих методов в школу, цель которой дать *базовые* знания, *основы* наук. Кроме того, общие, *абстрактные* понятия и методы современной математики не могут быть поняты детьми в силу возрастных особенностей их мышления.

По вопросу о введении элементов анализа и аналитической геометрии в объяснительной записке высказаны такие декларации: "Понимание основных положений современной математики о природе (?) (в широком смысле) и сознательное отношение к важнейшим проявлениям человеческой материальной культуры (?) *настоятельно требует* (?) от каждого (?) знакомства с плодотворными идеями высшего математического анализа. ... Многочисленные и разнообразные приложения, как в области самой математики, так и в других областях знаний и техники, обеспечивают (?) элементам высшей математики напряжённый (?) интерес со стороны учащихся" [там же]. Опять безграмотные, бессмысленные, претенциозные фразы и псевдоаргументация.

"Содержание программы по алгебре для 2-й ступени ... *Аналитическая геометрия* входила в программу IV класса и включала в себя темы: уравнение прямой; задачи на прямую; эллипс, гипербола и парабола как геометрические места. Элементарные свойства конических сечений. Асимптоты гиперболы. Простейшие задачи на касательные. Наконец, *анализ* входил в программу V класса (10-й год) и содержал разделы: пределы и теоремы о пределах. Производная и теоремы о производных. Задачи на наибольшие и наименьшие значения функций. Интегрирование, как операция, обратная дифференцированию. Понятие об определённом интеграле и его истолкование" [там же, с. 10].

В 1921 г. структура школы была изменена и в основу общего образования была поставлена 7-летняя школа (4 плюс 3 года) с последующей надстройкой в виде разветвлённой сети техникумов, обеспечивающих среднее профессиональное образование огромной массы молодёжи. Для этой школы были утверждены программы, которые действовали до 1924 г. В этих программах ещё более усилилась перегрузка, сохранены все предыдущие "реформаторские" идеи и добавлены новые:

"При изучении дробей авторы отдают *предпочтение десятичным дробям* и считают необходимым при решении задач встречающиеся простые дроби обращать в десятичные ... решительно высказываются *против задач*, противоречащих здравому смыслу и жизненной правде, которыми были полны дореволюционные задачники .. однако, впали в крайность и дошли до отрицания централизованных единых задачников для школы: ... "Задачник надо писать для каждой школы отдельно, то есть это должен делать сам учащий". ... они *отрицают значение задачников, составленных по строго продуманной системе* и имеющих своей целью постепенно развивать сообразительность, мышление, речь учащегося, помогать изучению самих основ арифметики. ... Говоря о целях преподавания алгебры, авторами совершенно *не упоминаются тождественные преобразования*, которым они не придавали самодовлеющего значения, а признавали за ними служебную роль: "Что касается тождественных преобразований, этой формальной стороны алгебры, то ей необходимо уделять внимания не больше, чем это требуется для выработки чисто технических навыков в упрощении уравнений". ... *Центральным* местом (?) программы авторы считают уравнения и идею *функциональной* зависимости. ... "Идея функциональной зависимости является основой всего уравнения (что за язык?? или это говорят не русские люди? — И.К.): вот почему для большей лёгкости восприятия результатов, получаемых аналитическим путём, в курсе предлагаемого типа тесно переплетается элемент вычислительный с графическим" [там же, с. 13, 14].

Возьмём на заметку эти новые идеи: 1) "предпочтение десятичным дробям"; 2) ликвидацию задач; 3) принижение тождественных преобразований; 4) идею функциональной зависимости, как центральную для всего курса алгебры. Не забудем и более ранние идеи: 5) ввести элементы алгебры и геометрии в начальную школу; 6) ввести элементы аналитической геометрии и анализа в среднюю школу; 7) "выкинуть целые главы" из традиционного курса; 8) "обогатить" курс *общими* понятиями и методами (в частности, идеей движения); 9) "порвать с традицией" и ликвидировать систему *последовательного* изучения цельных учебных предметов (арифметика – алгебра – геометрия – тригонометрия); 10) перемешать все эти предметы в одном конгломератном курсе математики, в котором не было бы “проводимо резких границ между отдельными математическими дисциплинами”.

Все эти идеи мы ещё встретим в 1930-х гг. и 1970-х гг. Все они доиграют-таки свою разрушительную роль в реформе 1970 г.

Сделаем пояснение относительно 2-й идеи. “Реформаторы” выступают “против задач, противоречащих здравому смыслу и жизненной правде”. Но, ведь, таковы, в сущности, все учебные задачи, даже те, которые кажутся не противоречащими “жизненной правде”. К примеру, какая “жизненная правда” в любой учебной геометрической задаче? Кто и когда в своей практической жизни решал такие задачи? Все учебные задачи возникали исторически и имели цели педагогические: развитие мыслительных способностей, овладение понятиями и методами математики и др. Исключать из обучения можно было бы те задачи, которые не достаточно хорошо выполняют эту свою педагогическую функцию. Но педагогическими функциями учебного материала “реформаторы” никогда не интересовались, никогда их не понимали. В дальнейшем мы увидим, что задачи будут постоянной мишенью “реформаторов” на протяжении многих лет и с разными вариациями оправдания.

Возьмём на заметку также некоторые словесные штампы и штампованные аргументы, которые употребляли “реформаторы”-20, как-то: “проблемы, *выдвигаемые* жизнью”; “*сюда* относятся”; “*необходимо* стремиться”; “*должны* быть *выкинуты*”; “курс алгебры *должен обогатиться*”; “характер изложения курса *должен* базироваться”; “настоятельно *требует*”; “слишком *закоснели* в нас старые привычки и *старый* взгляд”; “порвать с *традицией*, с её *старой* схемой”. С этими и подобными реформаторскими штампами мы будем непрерывно встречаться на всём протяжении нашего исследования, — в 1930-х, 40-х, 50-х, 60-х, 70-х годах.

Наконец, обратим внимание на искусственность привязки этих идей к политическому лозунгу “трудовой” школы. “Реформаторы” упирают на “применимость” своих нововведений. В дальнейшем мы увидим, что с изменением лозунгов (в 1930-х, 1950-х годах) будет видоизменяться их аргументация, неизменными будут только их идеи, которые они могут привязать к чему угодно.

Изначальная схематичность самой идеи трудовой школы и неприятие выдуманных реформ учителями заставляла их авторов искать помощи у новейших западных педагогов, в основном, американских. На базе чужеродных выдумок у наших педагогических идеологов[4] созрела концепция нового образования, суть которой заключалась в смешении всех учебных предметов в “комплексы”, организованные вокруг какого-то вида трудовой деятельности. После непродолжительного экспериментирования в опытно-показательных школах НКП Президиум Государственного Учёного Совета (ГУСа)[5] сделал вывод, что надо отвергнуть предметное обучение. В 1923 г. было принято решение о переходе на комплексную систему построения программ.

Новые программы, составленные Научно-педагогической секцией ГУСа под руководством Н. К. Крупской и П. П. Блонского, введены в школах с 1924/25 учебного года. Ими была упразднена предметно-урочная система обучения. Позже введен “бригадный метод”, инновационной изюминкой которого стала экономная оценка знаний учащихся — отвечал один “член бригады”, а его оценку получали все.

Процитируем очередные методические перлы “реформаторов” и обратимся к результатам.

“Усвоение навыков (навыки не усваиваются, они вырабатываются, а усваиваются знания, — И.К.) речи, письма, чтения, счёта и измерения должно быть теснейшим образом слито с изучением (усвоение слито с изучением? — И.К.) реальных явлений и *не должно быть в школе арифметики и русского языка как отдельных предметов*. ... Математика ... должна являться упражнением для детей в счёте и измерении изучаемых ими реальных явлений. Подобный ход работы (?) заставляет нас поэтому *отказаться от строгой системы и постепенности развития математических представлений и навыков*, как это было

[4]П. П. Блонский, С. Т. Шацкий, Б. П. Есипов, М. М. Пистрак, И. Гордон и др.

[5]ГУС (Государственный учёный совет) — орган Наркомпроса, созданный в 1921 г., осуществлявший общее руководство учебным делом (планы, программы, методы обучения, установки и др.). Его научно-педагогической секцией руководила Н. К. Крупская.

в старой школе ... Подчиняя (?) математику жизни, считая её роль служебной, мы (кто это "мы"? — И.К.) пользуемся её языком, её символами для того, чтобы эту жизнь понять, преобразовать (преобразовать языком? — И.К.). Поэтому (?) для нас *на первый план выдвигается* не строгость её доказательств, а их наглядность и простота" [там же, с. 16].

Нас интересует качество математических знаний. Вот что признаёт официальное "Народное просвещение" в 1924 г., после первых реформ: "Проверка пропускаемых в вузы показала, что анекдоты получаются не с одним только обществоведением. Обнаружилось *полное незнание основ математики* (арифметики, алгебры, геометрии), физики; слабы познания и в других областях программы. Говорить о безграмотности (катастрофической) письма прямо не приходится: она поразительна". То же самое подтверждают и экзаменаторы. "Хотя среди экзаменующихся, — говорит учитель физики Перельман, — преобладали окончившие не семь, а даже девять классов, их подготовка по математике и физике оказалась ниже всяких ожиданий. На экзаменах предъявлялись лишь самые минимальные требования: пришлось понизить их против программы, из опасения провалить чуть ли не всех экзаменующихся и не набрать нужного контингента. На конкурсном экзамене в Горную академию провалились 1500: две трети всех экзаменующихся" [5, с. 414].

Приведённая картина как будто списана с сегодняшнего дня. Отличие одно, — сегодняшние абитуриенты, не знающие основ математики и физики и не удовлетворяющие минимальным экзаменационным требованиям, не проваливаются, а массово поступают в вузы, успешно их заканчивают и превращаются в дипломированных специалистов (не знающих основ наук).

Приведенные выше не очень определённые данные позволяют грубо оценить качество-2 середины 1920-х гг. в 20-30%. С учётом понижения требований к поступающим в вузы, будем, для определённости, считать, что **качество-2 – 15%**. **Качество-1**, наверное, следует оценить в **0%**. Конечно, это грубые оценки, но для более точных оценок у нас нет других данных.

Картина не меняется и дальше, после вторых (или третьих), ГУСовских реформ 1924 г. В 1930 г. "Главсоцвос указывал, что ... ни с количественной, ни с качественной сторон знания поступающих не соответствуют тем *минимальным* требованиям, которые к ним предъявляются. Сплошь и рядом наблюдается отсутствие *навыков* в обращении с простыми и десятичными *дробями*, в преобразовании *алгебраических* формул, в составлении *уравнений* и решении *геометрических* задач и т.д., причём все отзывы сходятся на том, что окончившие семилетку, даже при наличии *формальных* знаний, не в состоянии приложить их к практическим заданиям. То же отчасти и в отзывах о подготовке по физике и химии. По русскому языку отмечается значительная *неграмотность*, выражающаяся в большом количестве орфографических и стилистических ошибок, а в особенности, а недостаточном умении владеть письменной и устной речью" [там же, с. 430]. То же, что мы наблюдаем и сегодня. Один к одному.

Подробнее остановимся на идеологах первой "коренной" перестройки математического образования. Факты их биографий и просветительские идеи приведены в книге [6] известного советского методиста И. К. Андронова, хорошо их знавшего.

Вольберг О. А. (1895-1942) — заведующий естественно-математической секцией Отдела реформы школы Наркомпроса. Заметим, молоденький 23-летний человек в 1918 г. поставлен кем-то у руля коренной реформы математического образования России. Этот молодой человек окончил частное реальное училище в г. Полоцке, в 1912 г. поступил в сельскохозяйственный институт, но не проучился там и одного года. Чем занимался после, не известно. Но известно, что "после революции одним из первых приходит в солдатской шинели в Наркомпрос *комиссар полка* т. Вольберг" [6, с. 99].

Несомненным полезным деянием О. А. Вольберга было создание журнала "Математика в школе", первый номер которого вышел в августе 1918 г. Его первой объявленной целью была "*новая* разработка педагогических вопросов ... по *обновлению* преподавания математики" [там же, с. 100]. Обоснование этой необходимости: "быстрый прогресс самой науки математики ... и колоссальное развитие приложений математики" [там же]. Т. е. цель сугубо реформаторская, никак не связанная с социальными процессами и задачами новой власти, к которым она искусственно привязывалась.

В первой же своей статье О. А. Вольберг заявляет основные реформаторские идеи: "Совершенно неуместно (?) разделение математики на отдельные дисциплины ... Идея функциональной зависимости

— вот тот стержень, который должен придать прочность и единство всей математике ... С первого года обучения необходимо понемногу приучать детей к уравнениям ... Вторая ступень ... Здесь уместно привить юношам понятие о роли аксиомы и о строго математическом методе ... Знакомство с основами математического анализа и дальнейшее изучение аналитической геометрии в тесной связи с естествознанием положит прочный фундамент математического образования" [там же, с. 102]. Хотелось бы знать, откуда почерпнул специфические реформаторские идеи молодой человек, не имеющий образования?

Но в 1920-х гг. этим идеям не пришло ещё своё время. Они быстро обнаружили свою несостоятельность, а их первый энергичный и невежественный реализатор покидает Наркомпрос и переезжает в Петроград, где становится заведующим (владельцем?) частного издательства "Сеятель". Показательна его дальнейшая просветительская деятельность. В 1923 г. переводит книгу немецкого педагога-математика М. Цахариаса "Введение в проективную геометрию". В 1930 г. издаёт свою книгу "Основные идеи геометрии". В 1935 г. книга выходит вторым изданием. Рецензент Н. Бескин находит в ней много "педагогической небрежности" и отмечает принципиальный методический порок: "автор часто подходит к некоторым понятиям с очень общей и высокой точки зрения, не сообщая при этом читателю важных элементарных конкретных сторон этих понятий, так что читатель вынужден рассуждать об очень "учёных" вещах, не подозревая, что они связаны с повседневно известными ему фактами" [7, с. 298]. Прекрасное разъяснение основного реформаторского принципа-ВТУ — преподавания на "высоком теоретическом уровне".

В 1935 г. пишет сценарий двух мультипликационных учебных фильмов и получает на этом основании степень кандидата физ.-мат. наук, а затем звание доцента. В 1938 г. переходит на работу в педагогический институт имени Герцена. В 1942 г. вывезен из блокадного Ленинграда и вскоре умер в Свердловске.

Я. С. Дубнов (1887-1957) — консультант О. А. Вольберга при Наркомпросе. Учился в Одессе в частной гимназии. В 1906 г. поступил в Новороссийский университет, из которого был исключён в 1910 г. "за участие в студенческом движении". Отсидел в тюрьме и был выслан в провинцию под надзор полиции. Заметим, что столь строгое наказание вряд ли объяснимо только "участием" в каком-то "студенческом движении". В 1913 г. сдал экстерном госэкзамен в Новороссийском университете и почему-то опять был выслан из Одессы. Далее, как сообщает И. К. Андронов, "преподаёт математику в средних учебных заведениях". В 1918 г. (31 год) появляется в Наркомпросе и "принимает живое участие" в секции Вольберга. Читает лекции в московских вузах и занимается научной работой в НИИМ при МГУ по отделу дифференциальной геометрии, где становится кандидатом наук. В 1936 г. получает степень доктора без защиты диссертации. В 1943 г., возвратившись из эвакуации, переходит на реформаторскую работу в АПН.

Переберём реформаторские идеи, которые Я. С. Дубнов разрабатывал на протяжении всей жизни. Его можно назвать главным разработчиком и писателем этих идей.

1918 г. Предлагает "сделать школьную математику ... более *богатой идеями*" [6, с. 140]. Но это значит внедрить в неё абстракции и сделать не понимаемой. Один из таких приёмов — основать изложение геометрии "на идее *движения*, — изложение, которое, кажется (?), ближе к психологии учащегося и богаче математическим содержанием" [там же]. Эта идея была реализована через сорок лет в учебнике В. Г. Болтянского и И. М. Яглома. Учебник этот в 1958 г. был внедрен в школу, а через полгода приказом Наркомпроса выведен из школы как абсолютно непригодный.

1919 г. Утверждает "преувеличенное внимание формальным преобразованиям" в алгебре и тригонометрии и выступает "против специальных упражнений этого рода", в частности, против *разложения на множители* [там же]. Идея, конечным результатом внедрения которой станет неспособность учащихся проводить простейшие *тождественные преобразования*.

1930 г. Издаёт учебное пособие для инженеров "Основы *векторного* исчисления".

1934 г. Издаёт пособие для учащихся старших классов "Введение в *аналитическую геометрию*".

1946 г. Предлагает "обогатить" *геометрию* семилетней школы подобными треугольниками, площадями, длинами, стереометрией. Для того чтобы придать ей "законченный характер". Даёт проект учебной программы такого курса с методической разработкой, построенной "на равноправии интуиции и *дедукции* с постепенным повышением удельного веса последней" [там же, с. 142]. Т. е. перегружает содержание программы и делает его непосильно логически формализованным. Конечный результат внедрения — ликвидация у выпускников школы всяких геометрических знаний.

1949 г. В докладе на школьной секции ММО предлагает "в преподавании *алгебры* усилить элемент рассуждений и обоснований". Тем самым, "усилить" формализацию и понизить понимаемость уже алгебры. Невзначай бросает тень на Киселёва и предлагает "преодолеть прочную ещё иллюзию, будто (?) ... "Геометрия" А. Киселёва" является "подлинной школой дедуктивного мышления" [8 (1950, №5), с. 6].

1956 г. В докладе на школьной секции ММО предлагает разделить курс *тригонометрии* на две части, и отнести одну часть к геометрии, другую к алгебре и анализу. Результат — абсолютное незнание школьниками тригонометрии.

1957 г. Возобновляет вместе с единомышленниками издание ежегодника "Математическое просвещение", в 5-м выпуске (1960 г.) которого опубликована его "лебединая песня" — "Содержание и методы преподавания элементов математического *анализа* и аналитической геометрии в средней школе". И мы сегодня знаем результаты внедрения этих "элементов" в программы и учебники.

С именем Я. С. Дубнова мы неоднократно встретимся в дальнейшем и на фактах увидим его роль в подготовке реформы 1970 – 1978 гг. и результаты воплощения всех разработанных им идей.

Рассмотренный период истории советской школы с 1918 г. по 1931 г. мы называем *первой* **коренной** *реформой*. Строго говоря, термин "реформа" здесь не правомерен, ибо его точный смысл не адекватен тому, что происходило в образовании в этот период. "Реформа (от лат. reformo — преобразовываю), — переустройство к.-л. стороны общественной жизни, **не уничтожающее основ** существующей социальной структуры" [9, с. 1134]. Но преобразования 1920-х гг. — это *слом* старой школы и неудавшаяся попытка построения новой. Мы оставляем слово "реформа" в силу его уже традиционной общепринятости в нашей педагогике. Для придания адекватного смысла добавляем к нему прилагательное — "*коренная* реформа".

Следует обратить внимание и вот на что. Реформы 1918-1931 гг. обычно делятся на три периода, в соответствии с изменениями действующих программ: 1918-1920; 1920-1924; 1924-1931. Эти периоды иногда тоже называют реформами, — первая, вторая, третья. Все эти периоды проходили под одним лозунгом ("сломаем старую школу"), с одной официальной целью построения новой "трудовой" школы и с одним результатом — непрерывным ухудшением качества знаний учащихся. Поэтому мы можем их объединить и обозначить одним термином — "первая коренная реформа", первый "слом" традиционного отечественного математического образования.

Это замечание следует иметь в виду и в дальнейшем. Реформа 1930-х гг. (о ней речь пойдет в следующей статье) тоже не реформа, а *реставрация*, восстановление дореволюционной русской школы. Реформы 1970-х и следующих годов — вновь *разрушение*, непрерывное разрушение, *слом*, по терминологии самих "реформаторов". Поэтому весь период, начиная с 1970 г. по настоящее время мы тоже объединим одним термином "*вторая коренная реформа*", второй "*слом*" восстановленной в 1930-х гг. системы математического образования.

В заключение обратим внимание на смысл эпиграфа: "худое дерево" — это дерево со слабыми корнями, не укорененное в данной почве. Отсюда мораль — только те новации плодотворны, которые исходят из традиции. В следующей статье мы убедимся в справедливости этой библейской истины.

Литература

1. Цирульников А. М. Из тайных архивов русской школы. - М.: Педагогика-пресс, 1992.

2. Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование. - М.: Просвещение, 2001.

3. Никитин Н. Н. Преподавание математики в советской школе 1917-1947 гг. // Математика в школе. - 1947. - №5.

4. Московский комсомолец. - 3 ноября 2009.

5. Милюков П. Н. Очерки по истории русской культуры. В 3 т. Т. 2, ч. 2. - М.: Прогресс, 1994.

6. Андронов И. К. Полвека развития математического образования в СССР. - М.: Просвещение, 1967.

7. Успехи математических наук. - 1936, вып. 2.

8. Математика в школе - 1939, №6, - 1948, №2, - 1950, №5, - 1956, №2, - 1957, №2, - 1996, №1, - 2002, №2, - 2011, №1, - 2012, №3.

9. Советский энциклопедический словарь. - М.: СЭ, 1980.

От автора. В первой статье, опубликованной в 58-м номере журнала, в списке литературы (стр. 12-13) по моей вине допущены следующие неточности:

Напечатано: “8. Учительская газета. 2000, №34-35”. Надо — “2001”.

Напечатано: “9. Народное образование. 1998, №4”. Надо — “№5”.

Напечатано: “15. Коммунист. 1989, №2”. Надо — “1982”.

Костенко Игорь Петрович,
Ростовский государственный университет
путей сообщения (филиал в г. Краснодаре),
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: kost@kubannet.ru

О межвузовской математической олимпиаде

А. И. Саблин

В последнее время отбор будущих студентов посредством различных соревнований становится всё более популярным среди высших учебных заведений. В заметке мы рассказываем об одном из таких соревнований по математике.

Введение

Объединённая межвузовская математическая олимпиада школьников впервые была проведена в 2009 году как “Московская межвузовская олимпиада школьников” по инициативе группы московских вузов. Победители и призёры олимпиады 2009 и 2010 года получали статус победителей и призёров олимпиады III уровня (см. Приказ МОН РФ 777 от 21.12.2009. Олимпиада под №29), который мог официально учитываться при приёме в вузы.

В 2011 учебном году порядок изменился в связи с изменением Порядка проведения олимпиад (приказ МОН РФ 1006 от 11.10.2010). Конкретные решения о льготах принимались вузами и были объявлены к 1 июня 2011 года.

Олимпиада проводится в 2 тура. Первый тур — заочный, второй тур — очный. К участию в первом туре допускаются учащиеся, осваивающие общеобразовательные программы основного и среднего (полного) общего образования независимо от места учебы, жительства. Информация о заочном туре публикуются на интернет-странице олимпиады [1]. При регистрации участники первого тура выбирают один из вузов-участников, в котором они будут выполнять задания очного тура. На второй (очный) тур приглашаются победители и призеры первого тура. Победители и призеры олимпиады определяются оргкомитетом по результатам второго тура Олимпиады. Количество победителей и призеров может доходить до 35% от числа участников второго тура Олимпиады.

В 2011 году первый тур олимпиады проводился с 25 декабря по 31 января, второй тур олимпиады прошёл 6 февраля.

Мы предлагаем Вашему вниманию подробный разбор наиболее характерных задач олимпиады 2011 года и задачи для самостоятельного решения.

Решения задач заочного тура

Задача 1. Известно, что $x + y = 7$, **а** $x + y + x^2y + xy^2 = 23$. Найти значение выражения $x^3 + y^3$.

Решение: Числа x и y в данной задаче — это решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y + x^2y + xy^2 = 23 \end{cases}$$

Левые части уравнений этой системы — *симметрические многочлены*. Симметрическим называется многочлен, который не изменяет своего значения при любой перестановки значений входящих в него переменных. Известно, что любой такой многочлен можно выразить через *простейшие симметрические многочлены*. Для случая двух переменных таких многочленов два: $s = x + y$ и $t = xy$. Так как $x^2y + xy^2 = xy\,(x + y) = ts$, то система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} s = 7 \\ s + ts = 23 \end{cases}$$

Здесь s уже известно, а t можно найти из второго уравнения при известном s: $t = 23/7 - 1 = 16/7$. Относительно переменных x и y получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = \frac{16}{7} \end{cases}$$

Решив эту систему, можно решить и задачу. Выкладки можно упростить, если заметить, что число, которое нужно записать в ответ тоже есть симметрический многочлен. Поэтому $x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = s\left(s^2 - 3t\right) =$

$$= 7\left(7^2 - 3\frac{16}{7}\right) = 7^3 - 3 \cdot 16 = 295.$$

Ответ: 295.

Задача 2. Известно, что $x + y = 12$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2$?

Решение: Так как $y = 12 - x$, то $x^2 + y^2 = x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$.

Как известно, квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, $a > 0$ принимает наименьшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$. Поэтому $2x^2 - 24x + 144$ принимает наименьшее значение при $x = -\frac{(-24)}{2 \cdot 2} = 6$. Само значение равно $2 \cdot 6^2 - 24 \cdot 6 + 144 = 72$.

Ответ: 72.

Задача 3. Число $409{,}6$ трижды увеличили на $x\%$, а затем трижды уменьшили на $x\%$. В результате получилось число $34{,}3$. Найдите x.

Решение: Пусть A число, тогда x процентов от этого числа — это $\frac{Ax}{100}$. Поэтому $A + \frac{Ax}{100} = A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$. Таким образом, увеличение числа на x процентов — это умножение на $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$. Аналогично, уменьшение числа на x это умножение на $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$. Поэтому в нашей задаче имеем относительно x уравнение:

$$409{,}6 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right) = 34{,}3$$

или

$$\left(1 - \frac{x^2}{100^2}\right)^3 = \frac{34{,}3}{409{,}6} = \frac{343}{4096} = \frac{7^3}{2^{12}}, \text{ откуда } \left(1 - \frac{x^2}{100^2}\right) = \frac{7}{2^4} = \frac{7}{16}.$$

Далее

$$\frac{x^2}{100^2} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} = \frac{3^2}{4^2}, \text{ наконец, } x = \frac{3}{4} \cdot 100 = 75.$$

Ответ: 75.

Задача 4. Если бы Вася весь путь бежал со скоростью 8 км/ч, то он бы как раз успел на поезд. Но Вася первую четверть пути бежал в 2 раза медленнее, чем надо было. С какой скоростью Васе придется бежать оставшуюся часть пути, чтобы успеть на поезд?

Решение: При решении задач на движение основным является уравнение: $S = V \cdot T$, где S — путь, V — скорость, T — время. Это уравнение нужно применять к каждому участку пути.

Пусть S — полный путь в нашей задаче, а V — неизвестная скорость. Тогда время, потраченное на первый участок, равно $\frac{1}{4}S : \frac{8}{2}$, на второй $\frac{3}{4}S : V$. С другой стороны, чтобы успеть на поезд, нужно потратить время равное $S : 8$. Поэтому

$$\frac{1}{4}S : \frac{8}{2} + \frac{3}{4}S : V = S : 8$$

Сократив левую и правую части уравнения на S и записав, в виде дробей получаем:

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{4V} = \frac{1}{8}$$

Умножим левую и правую части уравнения на 16: $1 + 12/V = 2$, откуда $V = 12$.

Ответ: 12.

Задача 5. В гранях ABD и BCD тетраэдра $ABCD$ провели медианы BM и DN. На этих медианах выбрали точки X и Y так, что XY параллельна AC. Во сколько раз XY меньше AC?

Решение: Может показаться не очень понятным, как точки X и Y выбирали. Чтобы прояснить этот вопрос сделаем проекцию грани ABD на грань BCD параллельно стороне AC (рис. 1).

При этом A проецируется в C, B и D остаются на месте, а середина AD точка M проецируется в середину DC точку M_1. Поэтому медиана BM треугольника ABD проецируется в медиану BM_1 треугольника BCD. Так как XY параллельна AC, то Y лежит на медиане BM_1 и на медиане DN треугольника BCD. То есть Y точка пересечения этих медиан. Для вычисления отношения длин XY и AC воспользуемся подобием треугольников BXY и BMM_1, а также DMM_1 и DAC. Из подобия треугольников BXY и BMM_1 имеем: $\frac{XY}{MM_1} = \frac{BY}{BM_1} = \frac{2}{3}$

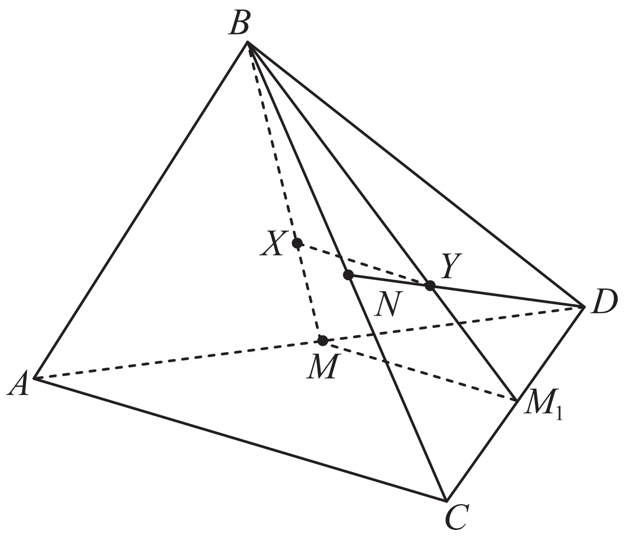


Рис. 1

Из подобия треугольников DMM_1 и DAC имеем: $\frac{MM_1}{XY} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{2}$, откуда

$$\frac{XY}{AC} = \frac{XY}{MM_1} \cdot \frac{MM_1}{AC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: в 3 раза.

Задача 6. Какое наименьшее количество цифр нужно написать подряд, чтобы вычеркиванием некоторых цифр можно было получить любое трехзначное натуральное число?

Решение: Так как необходимо получить числа 111, 222, ..., 999, то среди написанных цифр должно быть не менее трех единиц, не менее трех двоек, ..., не менее трех девяток. Так как число 100 тоже необходимо получить, то должно быть не менее двух нулей. Итого: 9·3+2=29 цифр.

С другой стороны, рассмотрим последовательность 29 цифр: 12345678912345678901234567890, состоящую из трех групп цифр. Любое трехзначное число можно получить из этого числа, выбрав первую цифру из первой группы, вторую цифру из второй группы и третью из третьей группы.

Ответ: 29.

Задача 7. Известно, что сумма трех натуральных чисел равна 939. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться десятичная запись произведения этих трех чисел?

Решение: Нетрудно убедиться, что 939=625+250+64 и $625{\cdot}250{\cdot}64=5^4{\cdot}5^3{\cdot}2{\cdot}2^6=10^7$, т.е. оканчивается семью нулями.

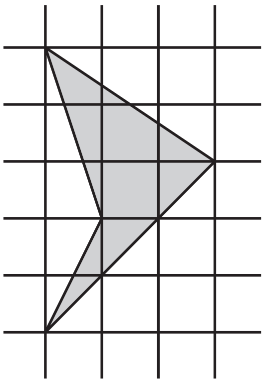
Почему нулей не может быть больше? Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} = \frac{939}{3} = 313$$

Поэтому $xyz \leq (313)^3 < (320)^3 = 2^{15} \cdot 10^3 = 2^5 \cdot 2^{10} \cdot 10^3 = 3,2 \cdot 1,024 \cdot 10^7 < 10^8$, т.е. произведение не может иметь более семи нулей.

Ответ: семь нулей.

Задача 8. Найдите площадь фигуры на рисунке.

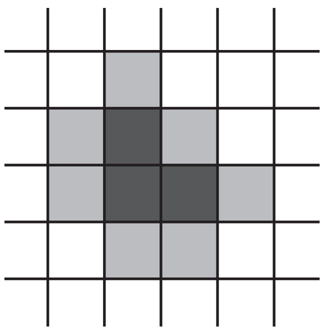


Решение: Пусть AB — диагональ данного четырехугольника, лежащая вне его, тогда искомая площадь есть разность площадей треугольников с основанием AB. У большего высота равна 3, а у меньшего высота равна 1, поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{5}{2} \cdot (3-1) = 5.$$

Ответ: 5.

Задача 9. На клетчатой бумаге закрасили "уголок" из 3 клеток, после чего 100 раз повторили следующую операцию: закрасить все клетки, граничащие (по стороне) с какой-либо из уже закрашенных (см. рис). Сколько всего закрашенных клеток (включая клетки исходного уголка) получилось?



Решение: Пометим три клетки, закрашенные вначале, цифрой 0. Клетки, закрашенные во время первой операции, пометим цифрой 1, во время второй — цифрой 2 и так далее. Пусть n_k — число клеток, закрашенных во время операции с номером k. Из рис. 2 видно, что $n_0 = 3, n_1 = 7, n_2 = 11, n_3 = 15, n_4 = 19$.

				4					
			4	3	4				
		4	3	2	3	4			
	4	3	2	1	2	3	4		
4	3	2	1	0	1	2	3	4	
4	3	2	1	0	0	1	2	3	4
	4	3	2	1	1	2	3	4	
		4	3	2	2	3	4		
			4	3	3	4			
				4	4				

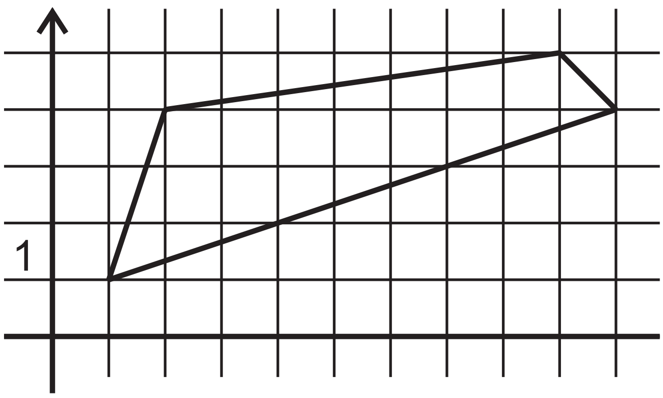
Рис. 2

Нетрудно заметить, что числа n_k образуют арифметическую профессию с разностью $d = 4$ и первым членом $n_0 = 7$. Поэтому $n_{100} = 3 + 100 \cdot 4 = 403$ и

$$n_0 + n_1 + ... + n_{100} = \frac{n_0 + n_{100}}{2} \cdot 101 = \frac{3 + 403}{2} \cdot 101 = 203 \cdot 101 = 20503$$

Ответ: 20503.

Задача 10. Найдите координаты центра окружности, описанной около четырехугольника на рисунке.



Решение: Координаты вершин четырехугольника равны: (1; 1); (2; 4); (10; 4); (9; 5). Пусть координаты центра окружности есть $(x; y)$. Запишем условия того, что расстояние от центра до первых трех точек равны:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-10)^2 + (y-4)^2} \end{cases}$$

Возведем в квадрат правую и левую части и раскроем скобки:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 20x + 100 + y^2 - 8y + 16 \end{cases}$$

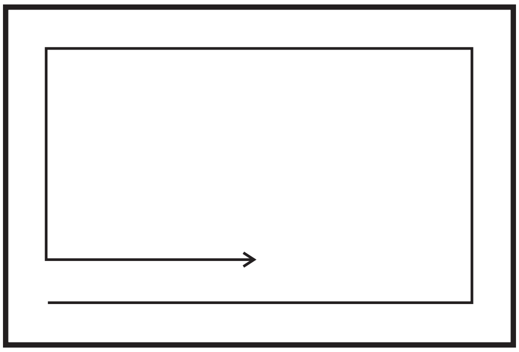
Приводя подобные, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 18 \\ 16x = 96 \end{cases}$$

Из второго уравнения x=6, из первого y=1.

Ответ: (6; 1).

Задача 11. Клетки прямоугольника 333×444 закрашивают последовательно — начиная с левой нижней и двигаясь по спирали против часовой стрелки. Найдите номер строки и столбца клетки, которая будет закрашена последней. (Например, левая нижняя клетка стоит в 333-й строке и первом столбце.)



Решение: Поставим каждой клетке прямоугольника в соответствие пару чисел — номер строки и номер столбца. Например, левой нижней клетке ставим в соответствии пару $(333; 1)$. Заметим, что когда мы закрасим границу исходного прямоугольника (то есть дойдём до клетки $(332; 1)$), то не закрашенные клетки тоже будут образовывать прямоугольник, размер которого 331×442. Обозначим его Π_1. Далее мы будем продолжать закрашивать с левой нижней клетки Π_1 и, когда закрасим границу Π_1, опять не закрашенным останется прямоугольник. Обозначим его Π_2, его размер 329×440. Пусть Π_k — прямоугольник, полученный после закрашивания границы прямоугольника Π_{k-1}. Тогда Π_k имеет $333 - 2k$ строк и $444 - 2k$ столбцов. В частности Π_{166} имеет $333 - 2 \cdot 166 = 1$ строку и $444 - 2 \cdot 166 = 444 - 332 = 112$ столбцов.

Отметим, что исходный прямоугольник мы закрашиваем начиная с клетки $(333; 1)$, Π_1 начиная с клетки $(332; 2)$, Π_2 начиная с клетки $(331; 3)$, $\ldots$, Π_k начиная с клетки $(333 - k;\ k + 1)$. В частности, Π_{166} мы закрашиваем, начиная с клетки $(167; 167)$. Поскольку Π_{166} содержит всего одну строку, то закрашивание закончится на крайней правой клетки этого прямоугольника. Так как Π_{166} имеет 112 столбцов, то номер столбца этой клетки $167 + 112 - 1 = 278$.

Ответ: номер строки 167, номер столбца 278.

Решения задач очного тура

Задача 1. Решить уравнение: $2|x-1|\sin x = x - 1$.

Решение: Значение $|x-1|$ зависит от знака $(x-1)$ поэтому рассмотрим 3 случая:

1. $x = 1$. В этом случае уравнение становится верным равенством.

2. $x > 1$. В этом случае $x - 1 > 0$ и уравнение принимает вид:

$$2(x-1)\sin x = x - 1$$

Поделив левую и правую части на выражение $2(x-1)$, не равное нулю, получаем уравнение:

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

которое имеет бесконечно много решений: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, из которых надо выбрать решения удовлетворяющие условию $x > 1$.

Во-первых, отметим, что решения, которые даёт эта формула, увеличиваются с увеличением n. Далее, при $n = 0$, имеем $x = \frac{\pi}{6} < 1$. При $n = 1$, имеем $x = (-1)^1 \cdot \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} > 1$. Итак $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

3. $x < 1$. В этом случае $x - 1 < 0$ и уравнение принимает вид:

$$2(-(x-1))\sin x = x-1$$

или $\sin x = -\frac{1}{2}$. Откуда $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots$ При $n = 1$, имеем $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} > 1$. При $n = 0$, имеем $x = -\frac{\pi}{6} < 1$. Итак: $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 0,\ -1,\ -2\ldots$

Ответ: 1; $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 1,\ 2,\ 3\ldots$; $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 0,\ -1,\ -2\ldots$

Задача 2. Ваня сдал три экзамена ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:

• прибавить по баллу за каждый экзамен;

• за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

Решение: Представим результаты Вани в виде тройки чисел $(x_0,\, y_0,\, z_0)$, где x_0 — результат по русскому языку, y_0 — результат по физике, z_0 — результат по математике, тогда $y_0 = z_0 - 9$; $x_0 = y_0 - 5 = z_0 - 14$. Пусть результаты Вани после выполнения рыбкой k желаний, есть тройка $(x_k,\, y_k,\, z_k)$. Ясно, что после выполнения $100 - z_0$ желаний вида 1 Ваня может из исходной тройки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ может получить тройку (86, 91, 100). Дальнейшие попытки применять желания к этому набору легко убеждают нас в том, что получить равные баллы за два экзамена не удается. Чтобы понять, почему это происходит, рассмотрим, как изменяются разности между баллами при применении одного желания.

Рассмотрим, например, $z_{k+1} - y_{k+1}$.

Если применяется желание первого вида, то $z_{k+1} - y_{k+1} = (z_k + 1) - (y_k + 1) = z_k - y_k$.

Если применяется желание второго вида и уменьшается x, то $z_{k+1} - y_{k+1} = (z_k + 1) - (y_k + 1) = z_k - y_k$.

Если применяется желание второго вида и уменьшается y, то $z_{k+1} - y_{k+1} = (z_k + 1) - (y_k - 3) = (z_k - y_k) + 4$.

Если применяется желание второго вида и уменьшается z, то $z_{k+1} - y_{k+1} = (z_k - 3) - (y_k + 1) = (z_k - y_k) - 4$.

Таким образом, разность или остается неизменной или увеличивается на 4 или уменьшается на 4. При этом остаток от деления разности на 4 не изменяется.

Так как $z_0 - y_0 = 9$, то остаток от деления $z_k - y_k$ на 4 всегда будет равен остатку от деления 9 на 4, то есть 1. Следовательно, добиться только желаниями вида 1 и 2 равенства $z_k - y_k = 0$ не удастся.

Так как $z_k - x_k$ и $y_k - x_k$ изменяются при применении желаний 1-го и 2-го видов аналогично $z_k - y_k$, и разности $z_0 - x_0 = 14$, $y_0 - x_0 = 5$ также не делятся на 4, то не удастся добиться и равенств $z_к - x_к = 0$ и $y_к - x_к = 0$, поэтому набрать 100 баллов более чем по одному экзамену Ваня не мог.

Ответ: нет.

Задача 3. Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а 3 тетради и блокнот — на 36 рублей дешевле 5-и ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит чётное число рублей? (Каждый из этих предметов стоит целое число рублей.)

Решение: Пусть блокнот стоит x рублей, ручка y рублей, тогда тетрадь стоит $98 - 3x - 2y$ рублей. По условию $3(98 - 3x - 2y) + x = 5y - 36$. После упрощения получаем $330 = 8x + 11y$. Необходимо найти целочисленные решения этого уравнения. Так как $8x = 330 - 11y = 11(30 - y)$, то x делится на 11. Кроме того, по условию $98 - 3x - 2y$ — чётное число, следовательно $3x$ чётное и x чётное. Итак, $x = 22k$, где k- целое положительное число. Так как $330 = 8 \cdot 22k + 11y$, то $30 = 16k + y$. Следовательно $0 < 16k < 30$ и $k = 1$. Поэтому $x = 22$, $y = 30 - 16 = 14$.

Ответ: тетрадь стоит 4 рубля, блокнот — 22 рубля, ручка — 14 рублей.

Задача 4. Каждому из двух рабочих поручили обработать одинаковое количество деталей. Первый выполнил работу за 8 часов. Второй потратил больше 2 часов на наладку оборудования и с его помощью закончил работу на 3 часа раньше первого. Известно, что второй рабочий через 1 час после начала работы оборудования обработал столько же деталей, сколько к этому времени первый. Во сколько раз оборудование увеличивает производительность труда?

Решение: Пусть оборудование увеличивает производительность в x раз. Тогда второй работник потратил на работу $\frac{8}{x}$ часов и $8-\frac{8}{x}-3=5-\frac{8}{x}$ часов на наладку оборудования. Так как второй работник за час обработал столько деталей, сколько первый за $(5-\frac{8}{x})+1$ часов, то $(5-\frac{8}{x})+1=1\cdot x$. Откуда $x^2-6x+8=0$. Это уравнение имеет два корня: $x=4$ и $x=2$. При $x=2$ на наладку оборудования потрачено $5-\frac{8}{x}=1$ час, что не удовлетворяет условию задачи. При $x=4$ на наладку оборудования потребовалось бы $5-\frac{8}{x}=3$ часа.

Ответ: в 4 раза.

Задача 5. Три правильных пятиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны двух пятиугольников равны 4 см и 12 см. Третий пятиугольник делит площадь фигуры, заключенной между первыми двумя, в отношении 1: 3, считая от меньшего пятиугольника. Найдите сторону третьего пятиугольника.

Решение: любой правильный пятиугольник подобен правильному пятиугольнику со стороной 1, поэтому его площадь равна a^2S, где a — сторона этого пятиугольника, а S — площадь пятиугольника со стороной 1. Пусть x см — неизвестная сторона третьего пятиугольника, тогда

$$\frac{x^2S-4^2S}{12^2S^2-x^2S}=\frac{1}{3},\ \text{откуда}\ 3x^2-3\cdot 4^2=12^2-x^2\ \text{или}4x^2=3^2\cdot 4^2+3\cdot 4^2.$$

Следовательно, $x^2=12\cdot 4$ и $x=4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

Задача 6. Функция f такова, что $f(2x-3y)-f(x+y)=-2x+8y$ для всех x, y.

Найдите все возможные значения выражения $\frac{f(5t)-f(t)}{f(4t)-f(3t)}$.

Решение: Подберём x и y так, чтобы выполнялись условия $2x-3y=t$ и $x+y=0$. Для этого нужно взять $y=-x=-\frac{t}{5}$. Тогда $f(t)-f(0)=-2\cdot(\frac{t}{5})+8\cdot(-\frac{t}{5})=-2t$.

Итак, $f(t)=f(0)-2t$. Проверим, что для такой функции исходное уравнение выполняется:

$$((f(0)-2\cdot(2x-3y))-(f(0)-2(x+y))=-2x+8y-4x+6y+2x+2y=-2x+8y.$$

Тождество верно. Найдём теперь искомую величину:

$$\frac{f(5t)-f(t)}{f(4t)-f(3t)}=\frac{((f(0)-2(5t))-(f(0)-2t))}{((f(0)-2(4t))-(f(0)-2(3t))}=\frac{-10t+2t}{-8t+6t}=\frac{-8t}{-2t}=4$$

Ответ: 4.

Задача 7. В равнобедренном треугольнике с периметром 60см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.

Решение: Пусть a — основание равнобедренного треугольника, h — высота, опущенная на основание, S — площадь. Тогда

$$S=\frac{1}{2}ah \tag{1}$$

Медиана, опущенная на основание, совпадает с высотой, поэтому вписанная окружность пересекает эту высоту на расстоянии $\frac{1}{3}h$ от основания, равном диаметру вписанной окружности. Поэтому радиус вписанной окружности равен $\frac{1}{6}h$. Так как площадь равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности, то

$$S=\frac{60}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}h\right) \tag{2}$$

Приравнивая правые части формул (1) и (2), получаем a=10. Так как треугольник равнобедренный, то две другие стороны равны $\frac{(60-10)}{2} = 25$

Ответ: 25, 25, 10.

Задача 8. Решите систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 13; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61; \\ xy + xz = 2yz. \end{cases}$$

Решение: Заметим, что y и z входят в систему симметричным образом. Введём новые неизвестные $s = y + z$ и $t = yz$, тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2t$ и система принимает вид:

$$\begin{cases} x + s = 13; \\ x^2 + s^2 - 2t = 61; \\ xs = 2t. \end{cases}$$

С помощью второго уравнения исключаем t, а с помощью первого — x и получаем уравнение относительно s: $(13 - s)^2 + s^2 - (13 - s)s = 61$, откуда $s = 4$ или $s = 9$.

При $s = 4$ имеем: $x = 13 - 4 = 9$, $t = \frac{1}{2}xs = 18$ и получаем систему относительно y и z:

$$\begin{cases} y + z = 4; \\ yz = 18. \end{cases}$$

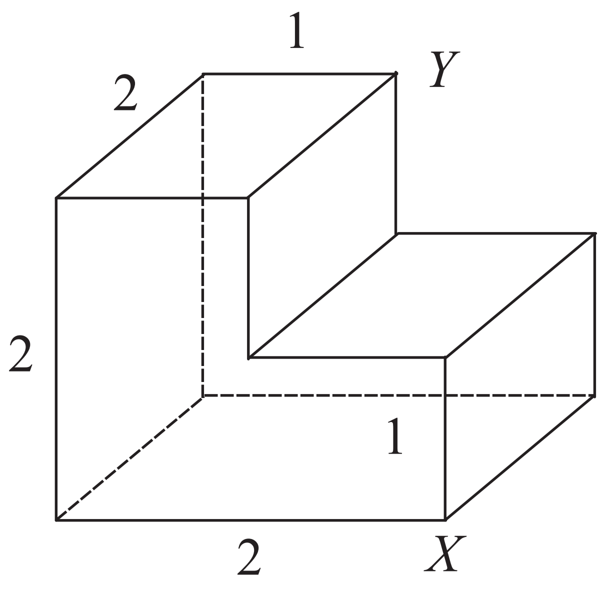
Эта система решений не имеет. При $s = 9$ имеем $x = 13 - 9 = 4$, $t = \frac{1}{2}xs = 18$ и получаем систему уравнений относительно y и z:

$$\begin{cases} y + z = 9; \\ yz = 18. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения (3;6) и (6;3).

Ответ: (4;3;6), (4;6;3).

Задача 9. На рисунке изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?



Решение: Развернув три правые грани на плоскость, соединим точки X и Yотрезком. Тогда его длина $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$. Следовательно, Саша не прав.

Ответ: нет.

Задача 10. Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству: $(|x| + |4 - |y|| - 4)^2 \leq 4$. Нарисуйте фигуру W и найдите ее площадь.

Решение: из данного неравенства видно, что если точка $(x; y)$ ему удовлетворяет, то и точки $(x; -y)$, $(-x; y)$, $(-x; -y)$ тоже ему удовлетворяют, поэтому фигура W симметрична относительно осей координат. Найдём часть фигуры, удовлетворяющую условиям $x \geq 0, y \geq 0$. Тогда неравенство примет вид: $(x + |4 - y| - 4)^2 \leq 4$.

Рассмотрим два случая:

1. $0 \leq y \leq 4$, тогда $|4 - y| = 4 - y$ и равенство принимает вид: $(x + (4 - y) - 4)^2 \leq 4$, $(y - x)^2 \leq 4$, $-2 \leq y - x \leq 2$, $x - 2 \leq y \leq x + 2$. Изобразим соответствующее множество на рис. 3.

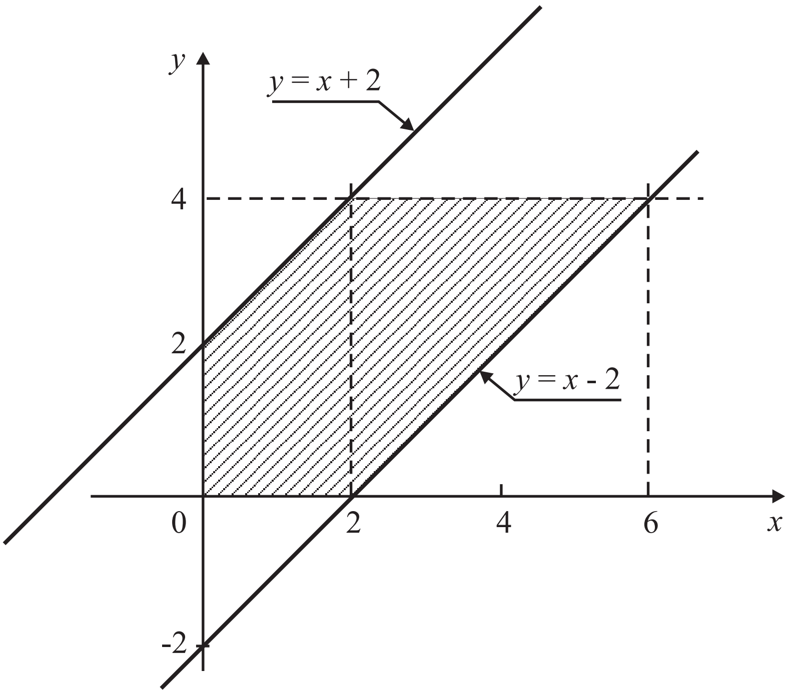


Рис. 3

Отметим, что площадь этой части можно найти, если из площади прямоугольника со сторонами 6 и 4 вычесть площадь двух равнобедренных прямоугольных треугольников со сторонами 2 и 4. Поэтому $S = 6 \cdot 4 - \frac{1}{2}(2 \cdot 2) - \frac{1}{2}(4 \cdot 4) = 24 - 2 - 8 = 14$

2. $y \geq 4$, тогда $|4 - y| = y - 4$ и равенство принимает вид: $(x + (y - 4) - 4)^2 \leq 4$, $(x + y - 8)^2 \leq 4$, $-2 \leq x + y - 8 \leq 2$, $6 - x \leq y \leq 10 - x$. Изобразим соответствующее множество на рис. 4.

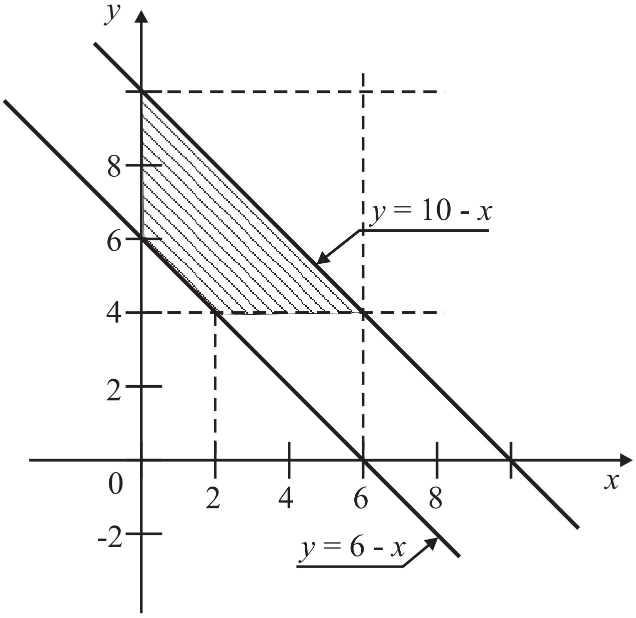


Рис. 4

Отметим, что площадь этой части есть разность площадей двух треугольников: из площади равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 6 нужно вычесть площадь равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 2. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 18 - 2 = 16$$

Соединив полученные части вместе, получим фигуру площадью 30. Отобразив полученную фигуру с помощью симметрии относительно осей координат и начала координат получим окончательный ответ на рис. 5.

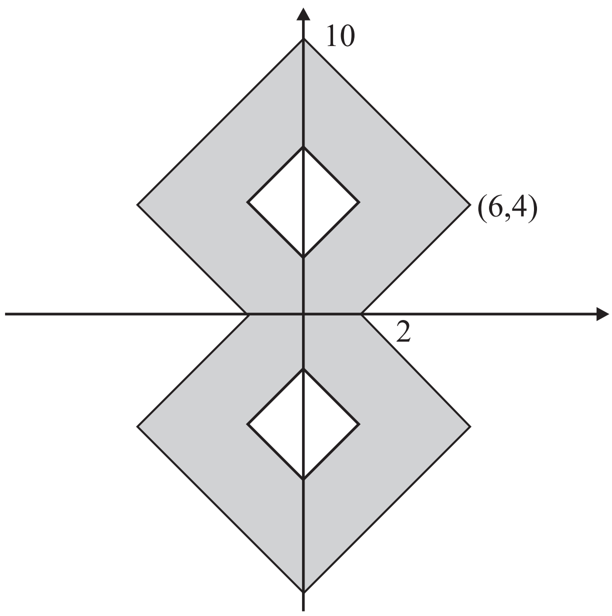


Рис. 5

Ответ: Фигура изображена на рис. 5, ее площадь равна 120.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$$

Задача 2. Цену товара сперва снизили на 20%, затем новую цену снизили ещё на на 15% и, наконец, после перерасчёта произвели снижение ещё на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Задача 3. Старший брат на мотоцикле, а младший на велосипеде совершили двухчасовую безостановочную поездку в лес и обратно. При этом мотоциклист проезжал каждый километр на 4 минуты быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из братьев за два часа, если известно, что путь, проделанный старшим братом за это время, на 40 километров больше?

Задача 4. Объём треугольной пирамиды равен 54. Найти объём пирамиды с вершинами в точках пересечения медиан данной пирамиды.

Задача 5. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 5 и из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на задуманное число, а затем вычли задуманное число. Осталась единица. Какое число задумано?

Задача 6. Найти площадь треугольника с вершинами (1;1), (7;2) и (6;5).

Задача 7. Клетки прямоугольника 666×888 закрашивают последовательно — начиная с левой нижней и двигаясь по спирали против часовой стрелки. Найдите номер строки и столбца клетки, которая будет закрашена последней.

Задача 8. Решить уравнение $2\,|x+2|\cos x = x + 2$.

Задача 9. На чудо-яблоне растут 100 бананов и 100 ананасов. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод?

Задача 10. Семь груш и одиннадцать яблок стоят 150 рублей. Сколько стоит груша и сколько стоит яблоко, если груша дороже яблока и стоят они целое число рублей?

Задача 11. Одна мельница может смолоть 19 центнеров пшеницы за 3 часа, другая 32 центнера за 5 часов, а третья 10 центнеров за 2 часа. Как распределить 133 тонны пшеницы между этими мельницами, чтобы, одновременно начав работу, они окончили её также одновременно.

Задача 12. Три правильных восьмиугольника имеют общий центр. Стороны двух восьмиугольников равны 7 и 42. Третий восьмиугольник делит площадь фигуры, заключённой между первыми двумя, в отношении 1:6, считая от меньшего восьмиугольника. Найдите сторону третьего восьмиугольника.

Задача 13. Функция fтакова, что $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x$ при $0 < x \leq 1$. Найти $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

Задача 14. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана боковой стороны 5. Найти длины боковых сторон.

Задача 15. Найти кратчайшее расстояние между противоположными вершинами прямоугольного параллелепипеда, имеющего ширину 1, длину 2 и высоту 3, проложенное по поверхности этого параллелепипеда.

Задача 16. Плоская фигура представляет собой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|2 - |x| - ||y| - 2|| \leq 1$. Найдите её площадь.

Ответы:

1. $(1;2),(2;1)$. **2**. На 38,8%. **3**. 20 км, 60 км. **4**. 2. **5**. 5. **6**. $9,5$. **7**. 333 строка и 333 столбец. **8**. -2; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n=-1,\ -2,...$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n=0,\ -1,\ -2,...$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n=0,\ 1,\ 2,...$ **9**. Ананас. **10**. 12 рублей и 6 рублей. **11**. 475, 480 и 375 центнеров соответственно. **12**. $7\sqrt{6}$. **13**. $\frac{1}{2}$. **14**. 6. **15.** $3\sqrt{2}$. **16**. 30.

Советуем почитать:

1. http://olimpiada.ru/ommo/

2. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы под общей редакцией Сканави М.И., Москва “Высшая школа”, 1972.

Саблин Александр Иванович,
доцент Московского Государственного
Университета Природообустройства.

http://sablin3103.narod.ru/

Воспоминания о гомотетии

Из редакционного портфеля

Год назад в редакции появился незнакомый нам посетитель и оставил небольшую рукопись, пообещав на днях зайти снова за ответом по поводу ее опубликования в нашем журнале. Нам было лишь сказано, что это небольшая часть написанных им мемуаров. Однако ни тогда, ни позже мы больше его не видели. Фрагмент рукописи был нами подготовлен к печати и помещается ниже с несколькими редакторскими комментариями.

…Сейчас, когда я пишу эти строки, мне вспоминается старая довоенная Одесса. По улицам города идет, покашливая, согбенный старик в старой соломенной шляпе. Он опирается на палку. В Одессе стоит вечер, и в переулки доносится шум Соборной площади, трамвая, бульвара, толпы — необыкновенный и одесский. Потом еще откуда-то, может быть, из форточки, — скрипка…

Иван Петрович Лобышев — семьдесят лет жизни и репутация чудака — идет по улице и опирается на палку, и полгорода его знает, и многие во всем мире знают его. Вокруг этого имени полвека вяжется клубок необыкновенных слухов и славы, триумфов и клеветы. Тут и статьи в энциклопедиях и авторитет жреца, жизнь на чердаке и таинственно-романтические истории с приборами средневековых алхимиков, древними манускриптами и научными открытиями, экспедиции на Восток и в Гималаи. Да, все в Одессе произносят это имя и рассказывают эти истории, и в течение десятилетий газеты и журналы печатают заметки о нем и статьи под заголовками «Забытый гений» и «Наш Ньютон». Старожилы называют его профессором и академиком. Безо всякой иронии. И до сих пор о нем не всё рассказано просто и ясно. Это впереди.

А тогда, много лет назад, старик Иван Лобышев — это один из обитателей нашего двора. Вся ребятня его знает. Мы бываем у него в гостях. Открыта дверь в получердачное его пристанище и зажжена лампа. Еще неясно видны окружающие предметы — они необычны и странноваты для постороннего; остовы стоящих на полках приборов, стеклянные колбы и реторты, кипы чертежей, необычного вида книги, картины. На стене – пожелтевшая фотография выпускного класса Ришельевской гимназии. На столе — еще не родившиеся конструкции и предметы, полувещи, инструменты, которые должны еще возникнуть — из материалов, из науки, из опыта и таланта ученого, конструктора, изобретателя. Словом, это тот самый мир, который пятьдесят лет уже окружает Ивана Лобышева. Мне довелось чуть-чуть соприкоснуться с этим миром…

Задача на построение

В тот день наша математичка задала на дом такую задачу:

Задача № 1. Провести окружность, касательную к двум пересекающимся прямым AM и AN и проходящую через данную точку K (рис. 1).

Именно эта задачка и привела меня с моим товарищем Мишей Лоскутовым[1] в мансарду Ивана Петровича.

[1] Возможно, Лоскутов Михаил Петрович, автор книги [1]. — *Прим. ред.*

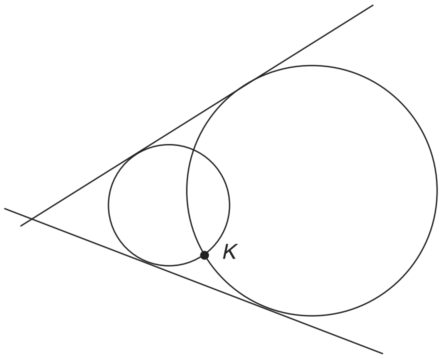


Рис. 1.

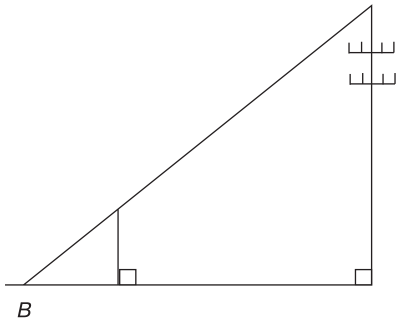


Рис. 2.

— Надо увидеть эту окружность, — сразу, только лишь взглянув на условие, сказал Лобышев.

— Как это *увидеть*?! На уроках математики мы говорим "найти, построить, определить, вычислить". Но увидеть, — не говорим никогда, — недоумеваю я.

— Да-да, увидеть, именно это самое главное во всем. И люди умеют видеть, это дано им природой. Ребенок отличит круг от треугольника. Самое главное здесь — проекция. Тень. На сетчатку глаза, например.

Посмотрите на рис. 2, объясняющий, как можно определить высоту предмета, например, телеграфного столба. Если считать, что в точке B находится источник света, то столб — это тень от вертикального шеста на прямую. Если смотреть из точки B, то можно сказать, что столб закрыт шестом. Так во время полного солнечного затмения Солнце оказывается закрытым спутником Земли — Луной. Если в телескопе закрыть солнечный диск кругом, то по краям, вне этого круга можно наблюдать солнечные протуберанцы. Когда мы смотрим диафильм, то каждая картинка — это проекция отдельного кадра на экран.

> *От редакции.* Современным читателям (и кинозрителям) принцип проектирования наглядно продемонстрировал Остап Бендер. Помните фильм «12 стульев»? Там Бендер поставил Кису под солнце и обводил его тень краской. Одной из причин неудачи Великого Комбинатора явилось то, что плоскость, в которой располагался Ипполит Матвеич Воробьянинов, не была параллельна плоскости холста. О деталях говорится ниже.

— Про проекцию ясно, — говорю я, рассчитывая поскорее перейти к нашей задачке.

— Не спешите, молодой человек, останавливает меня профессор, сначала проверим, как вы понимаете свойства этой проекции.

Все квадратичные параболы подобны

— Вот полезное упражнение, — продолжил профессор. Давайте-ка нарисуем на картоне в двух одинаковых системах координат две параболы $y = 4x^2$ и $y = x^2$ и затем вырежем две фигуры, ограниченные этими параболами. Разумеется, невозможно вырезать все эти неограниченные фигуры целиком, и посему рассмотрим лишь их части.

— Как вы думаете, можно ли вторую фигуру закрыть первой так, чтобы их края казались совпадающими?!

— Конечно же, нет. Эти параболы такие разные. Вот круги все одинаковые по форме, и даже очень большой круг можно закрыть маленьким, расположив его достаточно близко к глазу. А здесь первая парабола тонкая, она получается из второй растяжением в 4 раза вдоль оси ординат OY. Закрыть одну другой никак не получится.

— А вот и нет. Вернее, это правда, но не вся правда. Давайте-ка запишем уравнение первой параболы в таком виде: $4y = (4x)^2$. Это уравнение получается из уравнения второй параболы заменой y на $4y, x$ — на $4x$. Стало быть, одна парабола получается из другой в результате гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{4}$ или с коэффициентом 4. На рис. 3 указаны точки $(1;1)$ и $(1/4;1/4)$. Центр гомотетии — начало координат, точка $(0;0)$.

Зная это, можно теперь закрыть одну параболу другой. Закрыть именно в пространстве.

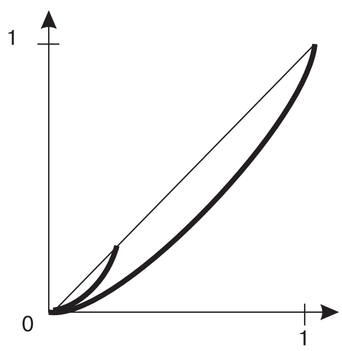


Рис. 3.

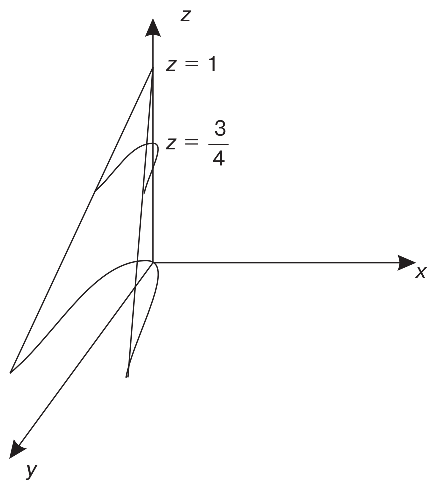


Рис. 4.

На рис. 4 наблюдатель находится в точке O с координатами (0,0,1), «узкая и тонкая» парабола лежит в горизонтальной плоскости $z = \frac{3}{4}$, вторая парабола $y = x^2$ лежит в координатной плоскости XOY. Для наблюдателя, находящегося в точке O, одна парабола затмевает другую!

— Теперь мне понятно, каким еще может быть взаимное расположение наблюдателя и двух параллельных плоскостей, содержащих наши параболы. Расстояния от наблюдателя до этих плоскостей относятся как 4 : 1 (или как 1 : 4) — это равняется коэффициенту гомотетии! — радостно восклицаю я. Теперь если вместо второй параболы взять лист бумаги, и на нем обвести тень от первой параболы, то...

— Да-да, подхватывает Миша: имея лишь шаблон одной параболы, мы сможем нарисовать еще о-о-чень много парабол. Это здорово: обычно-то сколько шаблонов мы используем? Два-три. А тут — бесконечно много парабол получается.

От редакции. Поясним факт гомотетии парабол в пространстве. Пусть наблюдатель находится в точке $O(0,0,1)$ (O — от слова окуляр), одна (а именно «узкая») парабола лежит в некоторой плоскости $Z = a$, которая параллельна координатной плоскости XOY. В этом случае координаты точек узкой параболы имеют вид $(x, 4x^2, a)$. Здесь a — неизвестный положительный параметр, значение которого требуется найти. Уравнение прямой, проходящей через точку O и произвольную точку узкой параболы, таково:

$$\frac{X-0}{x-0} = \frac{Y-0}{4x^2-0} = \frac{Z-1}{a-1}.$$

Мы хотим выбрать параметр a так, чтобы эта прямая в плоскости $Z = 0$ «рисовала» параболу $Y = X^2$. На этом основании приходим к системе уравнений

$$\frac{X}{x} = \frac{X^2}{4x^2} = \frac{-1}{a-1}.$$

Первое равенство должно быть тождеством относительно всех x и X. Следовательно, во-первых, отношение $\frac{X}{x}$ есть величина постоянная, равная, во-вторых 4. Из уравнения $4 = \frac{-1}{a-1}$ находим значение $a = \frac{3}{4}$.

Мы замечаем, что Профессор остался довольным произведенным эффектом. Он взял с полки коробку, похожую на футляр от готовальни. В коробке действительно оказались какие-то изящные и миниатюрные инструменты.

— Сейчас вы увидите делитель углов, — пояснил Лобышев. Он начертил на листе бумаги угол, и спросил нас, как его разделить пополам? И тут же продолжил — вот так.

Он придвинул нечто, внешне напоминающий микроскоп.

Необычный прибор

Здесь были две параллельные плоскости, верхняя была из тончайшего стекла, сверху — небольшой окуляр для глаза (ниже на рис. 5 — это точка O). На каждой из двух плоскостей были отмечены две микроскопические точки, на стеклянной стояла чуть видимая буква S, на нижней, горизонтальной — столь же малая P, рис. 5.

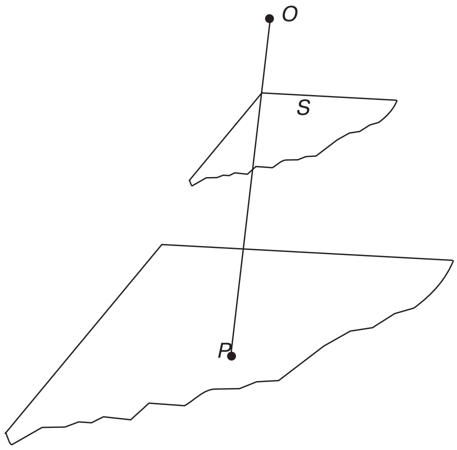


Рис. 5.

— Давно я не работал с этим инструментом, — продолжал Профессор, надо проверить его настройку. Он прильнул к окуляру. Что здесь самое главное? Главное, чтобы из окуляра была видна только одна точка, верхняя точка S всегда должна заслонять или затмевать нижнюю точку P, — говорите, как хотите. Вот я теперь передвигаю верхнюю стеклянную плоскость вверх-вниз, она всегда при этом параллельна нижней плоскости, и при этом из окуляра видна только одна точка, точнее, две слившиеся точки. Этот инструмент надо настроить так же чисто, как скрипку...

— Все в порядке, довольным голосом заключает профессор, начинаем решать геометрические задачи. С этими словами он поместил на нижнюю плоскость лист бумаги с нарисованным углом MAN, затем взглянул в окуляр и начал медленно передвигать лист бумаги. Сейчас я прицеливаюсь, как прицеливается охотник, когда подводит мушку ружья в прорезь прицела. Я совмещаю точки A и P. Посмотрите-ка, что получилось!

Мы по очереди прильнули к окуляру. Мы увидели белый лист бумаги, на нем угол MAN, (или MPN), рядом с A чуть просвечивало маленькое S. Профессор покрутил туда-сюда винт, стеклянная плоскость сместилась вверх-вниз, но при этом видимая картина не менялась: мы видели неизменный угол MAN и рядом с A чуть-чуть меняющуюся в размерах букву S.

Затем старик Лобышев достал из футляра подвижный каркас квадрата. Смотрите, пояснил он. Я помещаю квадрат на стекло и смотрю в окуляр. Теперь надо совместить вершину квадрата с вершиной угла, затем квадрат превратить в ромб, направив две его стороны вдоль сторон угла.

Совершенно ясно, что биссектриса данного угла определяется двумя точками — противоположными вершинами ромба! Он взял карандаш, и отметил им на бумаге ту точку T, которую заслоняла эта вторая вершина ромба. Вот так угол делят пополам, заключил он, показывая нам лист бумаги. Прямая AT — биссектриса угла MAN.

Тут мы посчитали уместным возразить. Уж очень это решение показалось нам непохожим на школьное, которое мы узнали на уроках планиметрии.

— Не волнуйтесь, поспешил нас успокоить Иван Петрович. Не смотрите на подвижный квадрат-ромб, сосредоточьтесь только на плоскости бумаги. Что вы там видите? Рисунок, который полностью соответствует школьному способу деления угла пополам (рис. 6)!

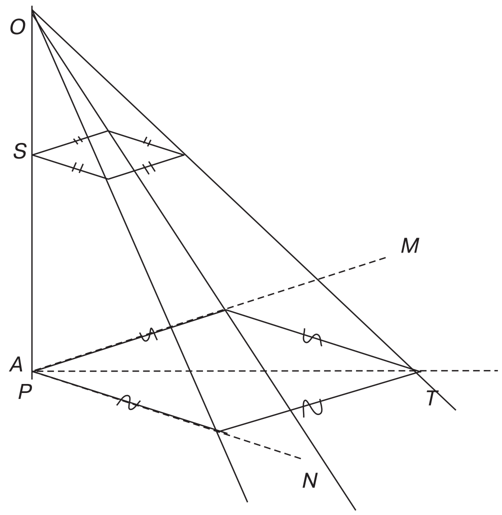


Рис. 6.

— Хочу вам сказать, юные друзья, что школьная планиметрия — это не планиметрия в точном понимании этого термина. Всякий планиметрический чертеж мы рассматриваем из точки, не лежащей в плоскости чертежа. В этом — одно из проявлений открытого мною великого закона повышения размерности. Все в процессе эволюции стремится выйти в пространство большей размерности. Любой птенец поднимается на крыльях с двумерной плоскости земли в трехмерное пространство. Ребенок перестает ползать и становится на ноги. Все стремится преодолеть ограничения размерности. Узник томится за высокой стеной замка, стена для него непреодолимая преграда. Для него, но не для вольной птахи. Даже в неживой природе реки, привычно текущие по одномерному многообразию своих русел, весной вырываются из границ берегов и разливаются. Полководец стремится обозреть поле битвы *сверху*. *Карта* есть отражение этого стремления. Вам не удастся разлить воду по любой поверхности сколь угодно тонким слоем. Этот слой имеют ненулевую толщину, он трехмерный.

Как вы проверите, что три точки лежат на одной прямой? Из трехмерного пространства, со стороны, этого не увидеть. Это знал каждый стрелок из лука. Его цель лежит на прямой, задаваемой стрелой лука. И он проводит эту прямую через точку-цель.

С другой стороны, если на плоскости имеется квадрат, и вы также находитесь в плоскости вне этого квадрата, то этот квадрат представляется вам отрезком. Отрезком представляется и треугольник, и окружность, и многое другое. Увидеть плоскую двумерную фигуру можно только из трехмерного пространства. И вся ваша школьная планиметрия — это взгляд на планиметрию из пространства. Возьмем метод гомотетии. Все имеющиеся в книжках задачи и чертежи — это взгляд со с т о р о н ы! Из пространства! И центр гомотетии мы видим со стороны. А как говорится, «каждый мнит себя героем, видя бой со стороны»! Рассматривать такие картинки, это все равно, что прицеливаться, рассматривая прицел и мушку ружья откуда-то сбоку. Обычно в планиметрии центр гомотетии мы наблюдаем со стороны, центр лежит в плоскости задачи, наблюдатель — вне этой плоскости. В свое время мне показалось интересным смотреть на задачу именно из центра гомотетии, — при таком подходе решение планиметрической задачи расслаивается на два слоя — одна часть оказывается в плоскости бумаги, другая часть — в «стеклянной» плоскости этого прибора.

Представьте, что вам надо распутать веревку или какую-нибудь сетку. Никто в плоскости это никогда не делает! В пространстве — другое дело. Вот давайте и распутаем планиметрические задачи в пространстве. А этот прибор позволяет вам смотреть на задачу из центра гомотетии. Он все задачи из плоскости за одну точку словно поднимает в пространство. Будто упавшие на землю шатер или палатка снова получили опору. Мой прибор позволяет «распутать« планиметрическую задачу. Гомотетия при этом раскрывается подобно тому, как раскрываются в воздухе стропы до того уложенного на земле парашюта. . .

– Однако, довольно аналогий. Давайте-ка вашу задачку № 1 про окружность, — продолжил Профессор.

Решение задачи № 1

Он поместил лист бумаги на нижнюю плоскость и прицелился (то есть поместил вершину A в точку P. И хотя точка P теперь была не видна — ее, ясное дело, заслонял лист бумаги — это было именно так: из окуляра была видна точка A, и рядом светилось маленькое S, но никакой другой точки не было видно. Это означало, что окуляр (то есть точка O) и точки S и A располагались на одной прямой. Затем профессор взял миниатюрный раздвижной угол, и разместил его на стеклянной плоскости, направив его стороны вдоль сторон угла AM и AN. Затем в его руках появилась крошечная окружность с двумя диаметрами, сделанная из тончайшей проволоки. Эту окружность профессор «вписал« на стеклянной плоскости в угол, передвигая ее по стеклу.

— Что следует делать дальше? — нарочито серьезно обратился он к нам. Думайте, юные дарования!

Мы с Мишей по очереди прильнули к окуляру. Отчетливо был виден угол MAN. Рядом с точкой A в таинственном, каком-то звездном ореоле светилась буква S, таким же светом были отмечены и небольшие отрезки сторон угла MAN, и внутри этих светящихся отрезков — маленькая и тоже светящаяся окружность с двумя диаметрами. В стороне чернела точка K.

На мгновение нам показалось что мы смотрим на звездное небо...

— Ну, как с задачей? — вернул нас к действительности голос Лобышева, — что дальше? Мы несмело покрутили винт, что нам еще оставалось делать?

Картина не изменилась, только окружность — уменьшилась. Покрутили винт в другую сторону, — окружность начала расти, но она по-прежнему касалась сторон угла. Мы еще повернули винт, окружность еще более увеличилась в диаметре. Наконец, настал такой момент, когда окружность доросла до неподвижной точки K (рис. 7). Мы ясно видели на листе бумаги ту окружность, которую надо было построить. Я оторвался от окуляра, посмотрел на бумагу сбоку, минуя окуляр, но там никакой окружности не было. Да и то правда, откуда ей там взяться, ведь эта мерцающая окружность была на стеклянной плоскости. Я снова взглянул в окуляр – искомая окружность была на месте! Теперь я взял в руку карандаш и, не отрывая глаза от окуляра, отметил на бумаге центр этой окружности. Помню, что от волнения я даже грифель сломал. Но зато теперь на бумаге был центр нужной нам окружности.

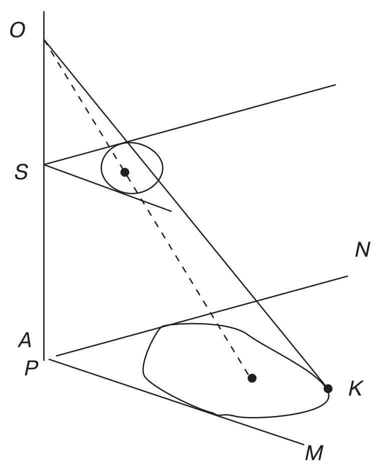


Рис. 7.

От редакции. Эта задача имеет, разумеется, два решения.

Следующая задача

— Вот еще одна интересная задача, — профессор ткнул пальцем в наш учебник геометрии:

Вписать в данный треугольник две равные окружности, касающиеся друг друга и двух сторон треугольника.

Работайте, — он подвинул в нашу сторону прибор и набор разных геометрических фигурок. Часть из них была из металла, другие — из слоновой кости, иные, прозрачные, — из стекла...

Первым делом мы нарисовали на листе бумаги произвольный треугольник AMN. Будем считать его данным. Что делали в предыдущей задаче, то и здесь сделаем, — прицелимся.

Миша совместил вершину A с точкой P, лежащей на нижней неподвижной плоскости. В окуляр был виден наш треугольник, рядом с A мерцала буква S. Как и раньше, на стекле мы разместили угол, равный MAN. Затем из шкатулки мы взяли две равные окружности, одну на стекле вписали в угол, — это было отчетливо видно в окуляр. Сделать это было легко: придерживая угол на стекле левой рукой, следовало, подталкивая окружность пинцетом, загнать ее в угол, как шайбу в ворота. Стороны угла чуть возвышались над стеклом и потому не позволяли окружности уйти за пределы угла. Вторую окружность мы расположили так, чтобы она касалась первой окружности и одной из сторон угла. (Можно сказать, провели вторую шайбу).

> *От редакции.* Обратите внимание: все эти построения, — а именно, построение угла, равного данному углу, построение вписанной в этот угол окружности, и, наконец, построение второй окружности, касающейся первой окружности и одной стороны угла, — легко осуществимы на бумаге с помощью циркуля и линейки.

Мы внимательно посмотрели в окуляр. Внутри данного треугольника AMN приютились две небольшие окружности — одна была вписана в угол A треугольника, вторая — касалась этой окружности и стороны треугольника. Всё смотрелось хорошо и всё было замечательно, не хватало лишь касания второй окружности третьей стороны треугольника.

Но в нашем распоряжении был винт этого диковинного прибора. В окуляр мы наблюдали, как при его вращении менялись две окружности. Треугольник на бумаге был неизменным, а радиусы окружностей увеличивались или уменьшались. При этом качественно картина не менялась: окружности касались друг друга, одна окружность все время касалась двух сторон треугольника...

Дальнейшее, думаем, всем понятно. В какой-то момент вторая окружность коснулась третьей стороны треугольника. После этого нам оставалось лишь поднести карандаш к листу бумаги и отметить на нем центры видимых нами в окуляр окружностей.

Пока Миша не отрывался от окуляра, я посмотрел на прибор со стороны.

Интересно: на бумаге был виден данный треугольник, на стекле — угол с двумя окружностями. А Миша через окуляр наблюдал объединенную, своего рода синтезированную картину, дающую решение задачи! Действительно, всякий смотрящий через окуляр, был в самом центре событий, в центре гомотетии. Хорошая позиция для знакомства с ситуацией. Так бывает в кинозале: есть такие места, из которых плоское изображение на экране кажется объемным.

Мы с Мишкой вошли во вкус. Нам показалось, что у нас в руках удивительная машина по решению сложных геометрических задач. По сути дела так оно и было на самом деле.

— Дайте еще задачу! — почти бесцеремонно потребовали мы у Профессора, а Миша, обычно такой серьезный, вдруг весело пропел:

> Ура-ура, пришла весна,
> Задача стала нам ясна!
> Через этот окуля...
> Мы, что на..., — определя...!

Я тоже не удержался, и в свою очередь в том же духе предпринял попытку выразить свое восхищения славным прибором Профессора:

Геометрию мы знаем,
И задачи все решаем.
Я в магический прицел
Все, что надо, разглядел!

– Еще нам задачу! – Ну, хорошо, извольте:

В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы все его вершины лежали на сторонах треугольника.

По голосу нашего доброго учителя чувствовалось, что он с удовольствием возится с нами. Я хотел было приняться за работу, но Миша — он был силен по математике — воскликнул:

— Ну уж нет, дайте задачу посложнее и поинтереснее! Эта очень похожа на предыдущую! Не велика важность — заменить окружность квадратом. Тебе я потом расскажу решение, если сам не решишь, — бросил он мне. Главное здесь то, что окуляр перемещается всегда по оси Z. Мне видится во всех этих задачах некая пирамида, у которой ребро, исходящее из вершины, перпендикулярно основанию. В основании и в сечении этой пирамиды — подобные рисунки и фигуры.

От редакции. Докажем, например, что при центральном проектировании окружности на параллельную ей плоскость всегда получается окружность. Первое доказательство такое. Рассмотрим пирамиду, основание которой — квадрат. Если провести сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, то что получится в сечении? Квадрат, всегда квадрат, даже если пирамида неправильная. Для любой пирамиды. А теперь посмотрим на окружности, вписанные в эти квадраты. Вот об этих окружностях и идет речь во всех задачах этого текста про гомотетию! Наблюдатель находится в точке O — в вершине пирамиды, на стеклянной (прозрачной) плоскости он видит окружность и ее центр — он обозначен как пересечение двух диаметров. Наблюдатель водит карандашом по нижней плоскости — по бумаге. Он подводит «карандаш» под видимый центр малой окружности и отмечает центр большой окружности. Он может отметить любую точку нижней окружности, даже всю эту окружность нарисовать. Для решения задач обычно нужны лишь несколько точек.

Второе доказательство — аналитическое. Пусть наблюдатель находится в точке $O(0,0,1)$. В плоскости $Z = c$ $(0 < c < 1)$ расположена окружность, уравнение которой таково:

$$z = c, x = a + r\cos t, y = b + r\sin t.$$

Это уравнение окружности в так называемой параметрической форме. Легко видеть, что

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Прямая, проходящей через точку O и произвольную точку этой окружности, определяется системой уравнений:

$$\frac{X-0}{a+r\cos t-0} = \frac{Y-0}{b+r\sin t-0} = \frac{Z-1}{c-1}.$$

Что рисует эта прямая в плоскости Z = 0 при изменении параметра t? Для ответа на этот вопрос в последней система положим $Z = 0$ и выразим x и y через t. В результате получим

$$X = \frac{-c}{c-1}\left(a + r\cos t\right), \quad Y = \frac{-c}{c-1}\left(b + r\sin t\right).$$

Очевидно, что это уравнение определяет окружность радиуса $\frac{-cr}{c-1}$ с центром в точке $\left(\frac{-ac}{c-1}, \frac{-bc}{c-1}\right)$.

— Да, вы правы молодой человек, это несложная задача, — как-то совсем по-академически произнес Профессор. Что же тут есть еще?... Вот, пожалуй:

В данный треугольник вписать прямоугольник, подобный данному.

Но и эта задача по сути совпадает с предыдущей, тихо, словно самому себе, произнес профессор. Вот вам хорошая и действительно непростая задача, мои юные таланты:

Даны две пересекающиеся прямые a и b, и точка A. Построить точку X на прямой b, равноудаленную от прямой a и точки A.

От редакции. Мы предлагаем нашим читателям прервать чтение и самим построить эту точку в плоскости традиционными способами.

Ну а я снова мысленно переношусь на десятилетия назад, вижу профессора Лобышева, и нас с Мишей, колдующих у окуляра. Как мы тогда решили эту задачу?

Во-первых, мы прицелились на точку пересечения прямых a и b — точку T, и рядом с ней на листе бумаги появилась буква S. Затем извлекли из шкатулочки квадрат (обозначим его $MNKL$) с подвижными сторонами и его сторону MN поместили на прямой a (при этом точка N располагалась между точками T и M). Затем провели карандашом прямую AT и стали квадрат двигать по прямой a до тех пор, пока вершина квадрата K не оказалась на второй данной прямой b (рис. 8, слева). Следующим шагом, зафиксировав сторону NK на стекле, мы начали поворачивать сторону квадрата KL вокруг точки K. Квадрат при этом ясное дело превратился в ромб, но в итоге точке L оказалась на прямой AT (рис. 8, справа).

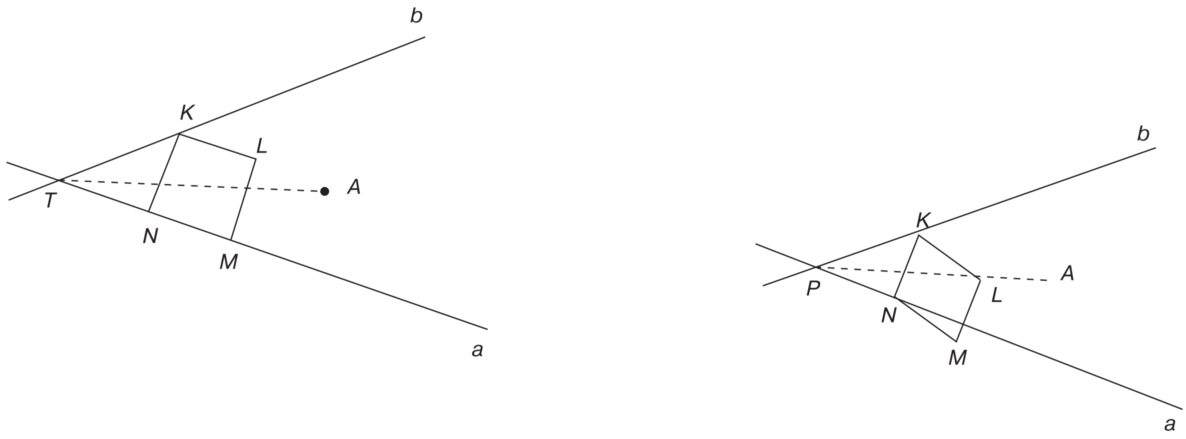


Рис. 8.

Теперь на прямой b была видна точка K, равноудаленная от прямой a (на расстояние NK) и от точки L. Если бы точки L и A совпадали, то точка K была бы искомой. Но нет, эти точки не совпадали.

Мы начали вращать винт (вот тут-то и «заработала» гомотетия!). В окуляр хорошо было видно, как три точки — вершины ромба N, K, L — поползли по прямым a, b, AT соответственно.

В какой-то момент точка L совпала с точкой A. И тогда Миша спокойно, как будто он уже лет сто решал геометрические задачи таким способом, отметил на бумаге карандашом точку K и написал рядом букву X. И сделал он это совсем по-будничному. Да, верно говорят: искусственный прием, примененный дважды, — это уже метод.

Я же был в восторге.

Четырехмерный окуляр?!

Профессор заметил это, у него по-особенному блеснули глаза.

— А сейчас я покажу вам **нечто**! Если уж **пустой** окуляр так вас поразил, то что же будет сейчас!...

Он достал из глубины шкафа небольшой футляр, извлек оттуда какую-то штучку, походившую на объектив моего ФЭДа. (*От редакции.* Современным читателям, пожалуй, надо сказать, что ФЭД — сокращение от Феликс Эдмундович Дзержинский — популярный советский фотоаппарат). Профессор укрепил эту насадку на окуляре.

— Смотрите, — торжественно произнес, нет, не произнес, а возвестил Иван Петрович, — теперь в окуляре четырехмерная точка!

Но тогда (как жаль!..) мы были слишком малы для таких вещей, слова профессора както пролетели мимо, не задев нас. Тогда в наших учебниках не было ни слова о размерности пространства.

Он же положил на стекло обыкновенный стертый пятак. Я посмотрел в окуляр и... одновременно увидел обе стороны монеты.

— С какой же стороны мы смотрим на эту монету, если сразу видим две ее стороны одним глазом?! — этот вопрос родился у меня мгновенно.

— В то-то и дело, что ни с какой! Мы на нее смотрим из четырехмерного пространства! Находясь в плоскости, мы можем говорить, что смотрим на прямую с одной или с другой стороны. Как только мы вышли из плоскости, в которой лежит эта прямая, говорить об этом не имеет смысла. Например, человек может находиться на одном, или на другом берегу реки.

Но обычно так не говорят о чайке, парящей в воздухе...

Потом настала Мишина очередь прильнуть к окуляру.

— Ничего особенного, обычная система зеркал, — безапелляционно заявил он.

— Нет, это не так просто, — с явной долей обиды возразил профессор. Вы же не в цирке у Кио. Вы, возможно, сейчас единственные на всей Земле, кто смотрит на мир из четырехмерной точки. Это уникальный экспонат, это осколок Великой Лаборатории из..., тут он осекся. А вы говорите — зеркала. Смотрите еще, и он заменил монету небольшим игральным кубиком.

В окуляр одновременно были видны все шесть, да-да, именно все шесть граней сразу! Они каким-то невероятным и странным образом примыкали одна к другой, причем каждая грань соприкасалась с четырьмя другими по ребрам. У меня чуть закружилась голова, на мгновение я перестал ощущать, где низ, где верх...

Иван Петрович не останавливался. Он показал небольшую разборную сферу, состоявшую из двух половинок. Снаружи она была красной, внутренняя поверхность была синей. Этот красный шарик Профессор разместил на стеклянной подставке своего прибора. Когда же мы взглянули в окуляр, то увидели бесконечную синюю плоскость или пространство (как отличить одно от другого?) и ... красный круг. Разобраться в том, каким непостижимым образом это получалось и откуда в окуляре брался синий цвет, было абсолютно невозможно...

К реальности нас с Мишей вернул голос Профессора:

— Вот вам задача для домашней работы:

Вписать в данный квадрат правильный треугольник так, чтобы одна его сторона была параллельна данной прямой.

— До свидания, молодые люди!

Эпилог

Прошли годы. С третьего курса математического факультета Миша ушел на фронт, стал штурманом дальнего бомбардировщика. Быть может, вглядываясь в прицел для бомбометания, он вспоминал магический окуляр Лобышева. С войны Миша не вернулся.

Наши встречи с Лобышевым всегда возникали у меня в памяти, когда в линзах военного бинокля я видел насечку для определения расстояний до недоступного объекта — и здесь работало подобие...

...Всякий раз, обходя ныне отделы и лаборатории нашего института, я встречаю напряженные лица сотрудников. Они ищут четырехмерную точку. Она так нужна для новых технологий, ее ждут наши конструкторы и инженеры, медики и генетики. Мне казалось, что обнаружить и синтезировать ее мы успеем еще в этом веке. Не получилось. Пока не получилось.

Возьмите книгу и расположите ее на уровне глаз в горизонтальной плоскости. Вы ничего не увидите и ничего не прочитаете. Ваш зрачок находится в плоскости листа. В этом причина. Чуть поверните книгу или поднимите глаза и измените точку зрения, и текст станет видимым. Вот такой же поворот надо сделать в нашем трехмерном пространстве. Поворот хотя бы *на чуть-чуть*. У профессора Лобышева была такая точка, мы с Мишей смотрели из этой точки на трехмерный мир. Но... Это непреодолимое пока НО...

> *От редакции.* Гипотетическое существование “четырехмерного окуляра” связано, возможно, не только с повышением размерности, но и с криволинейным распространением лучей света. Рассмотрим простой пример. Пусть окуляр наблюдателя находится в плоскости окружности, внешняя стороны окружности окрашена в красный цвет, а внутренняя — в синий. Если окуляр находится вне окружности, наблюдатель видит ее как красный отрезок. Изнутри он увидит окружности полностью как синюю линию горизонта. Теперь предположим, что окружность расположена на сфере и лучи распространяются по поверхности сферы. Тогда как бы ни был окуляр расположен на сфере, наблюдатель увидит полную окружность как линию горизонта — красную или синюю.
>
> Теперь пример посложнее. Рассмотрим в трехмерном пространстве окружность и прямую в плоскости окружности, не имеющую с окружностью общих точек. При вращении окружности вокруг прямой образуется поверхность вращения, которая называется “тор” (поверхность “бублика”). Окружность называют “образующей” тора. Нарисуем на торе образующую окружность и одну ее сторону на торе окрасим в красный цвет, а другую — в синий. Тогда если окуляр находится на торе и лучи распространяются по поверхности тора, то наблюдатель увидит одновременно обе стороны окружности — и красную, и синюю!
>
> Попробуйте самостоятельно нарисовать эти примеры!
>
> Аналогичные построения возможны в пространствах и на поверхностях более высокой размерности.

Бывая в Одессе, я всегда захожу в небольшой скверик, существующий теперь на том самом месте, где стоял наш дом, где жил Иван Петрович Лобышев и где была его удивительная лаборатория с удивительными приборами. Соседи, те, кто не успел эвакуироваться, говорили, что снаряд попал прямо в дом... И теперь где-то здесь, на шумных улицах города, оказалась потерянной удивительная четырехмерная точка из окуляра Профессора. Навсегда ли? Как ее найти?

Будь проклят тот, кто начинает войны!

Литература

1. Лоскутов М. Немного в сторону М.: «Советский писатель» 1985. 272 с.

Об одном классе линейных дифференциальных уравнений

В. В. Ивлев, М. В. Баранова

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых являются производными от некоторой функции. Даются критерии прямого интегрирования уравнений. При этом нет необходимости исследовать отдельно однородные и неоднородные уравнения. Для ряда случаев приведены формы интегрирующих множителей, позволяющие получить первые интегралы уравнений.

1. Построение интегрируемых форм. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$p(x)y^{(n)} + a_1p'(x)y^{(n-1)} + ... + a_np^{(n)}(x)y = q(x), \;\; a_i - const, \;\; i \in \overline{1,n}. \tag{1}$$

Левую часть (1) обозначим через $L_n(y)$, т.е. уравнение (1) имеет вид:

$$L_n(y) = q(x). \tag{1'}$$

Линейной форме $L_n(y)$ поставим в соответствие другую линейную форму

$$\overline{L_n(y)} = \left[p(x)y^{(n-1)}\right]' + \overline{a_1}\left[p'(x)y^{(n-2)}\right]' + ... + \overline{a_{n-1}}\left[p^{(n-1)}(x)y\right]', \tag{2}$$

$$\overline{a_i} - const, \quad i \in \overline{1,n-1}.$$

Если удастся, зная a_i, подобрать $\overline{a_i}$ так, что $L_n(y) = \overline{L_n(y)}$, то будем говорить, что линейная форма $L_n(y)$ интегрируема и первый интеграл уравнения (1) принимает вид

$$p(x)y^{(n-1)} + \overline{a_1}p'(x)y^{(n-2)} + ... + \overline{a_{n-1}}p^{(n-1)}(x)y = \int q(x)dx + C_1. \tag{3}$$

Введем следующую процедуру выбора коэффициентов $\bar{a_i}$:

$$\overline{a_1} = a_1 - 1, \quad \overline{a_2} = a_2 - \overline{a_1}, \quad \dots , \quad \overline{a_{n-1}} = a_{n-1} - \overline{a_{n-2}}. \tag{4}$$

Прямая подстановка $\overline{a_i}$ из (4) в (2) показывает, что формы $L_n(y)$ и (2) тождественные, если

$$\overline{a_{n-1}} = a_n \;\text{ или }\; a_n - a_{n-1} + a_{n-2} + ... + (-1)^n = 0,$$

что равносильно

$$1 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n = 0. \tag{4'}$$

Условие (4′) является критерием того, что уравнение (1′) интегрируемо. Если (4′) выполнено, то следующим критерием интегрируемости уравнения (3) является условие

$$n - (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + ... + (-1)^{n-1}a_{n-1} = 0. \tag{5}$$

Оно проверяется повторением процедуры (4), т.е.

$$\overline{\overline{a_i}} = \overline{a_1} - 1, \quad \overline{\overline{a_2}} = \overline{a_2} - \overline{\overline{a_1}}, \quad \dots , \quad \overline{\overline{a_{n-2}}} = \overline{a_{n-2}}.$$

Напрашивается мысль, что, если ввести знакочередующуюся функцию,

$$\varphi(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + ... + (-1)^n a_n,$$

то

$\varphi(1) = 0$ — критерий интегрируемости ($1'$),

$\varphi'(1) = 0$ — критерий интегрируемости (3) при условии (1) и т.д.

Подтверждением этого соображения является формула Лейбница

$$[p(x)y]^{(n)} = p(x)y^{(n)} + C_n^1 p'(x)y^{(n-1)} + ... + C_n^n p^{(n)}(x)y. \tag{6}$$

Очевидно, что линейная формула (6) интегрируема n раз. Здесь роль коэффициентов a_i играют коэффициенты бинома Ньютона. Функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + (-1)^n C_n^n$$

Из комбинаторики известно, что

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i) C_n^i = 0 \text{ и т.д.}$$

т.е. имеют место соотношения:

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = 0, \dots , \quad \varphi^{(n-1)}(1) = 0.$$

Впредь функцию $p(x)$ будем называть *производящей*, а функцию $\varphi(x)$ — *характеристической*.

Возможны следующие частные случаи интегрируемости:

а) Пусть первые k старших производных в (1) имеют постоянные коэффициенты, а последующая группа производных $y^{(n-k-1)}$, ..., y' содержит в качестве переменных коэффициентов производные от некоторой производящей функции, т.е. имеем уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_k y^{(n-k)} + a_{k+1} p(x) y^{(n-k-1)} + ... + a_n p^{(n-k)} y = 0.$$

Критерием интегрируемости является условие $a_{k+1} - a_{k+2} + ... + (-1)^{(n-k)} a_n = 0$ и т.д.

б) Группа производных с постоянными коэффициентами содержится “внутри” всего ряда производных. Тогда, если для каждой из групп производных с переменными коэффициентами выполняется (4), то в целом уравнение (1) допускает понижение порядка на единицу прямым интегрированием. При этом имеются две производящие функции.

В ряде случаев удается найти интегрирующий множитель, позволяющий привести (1) к интегрируемой форме. Однако в общем случае даже для данного класса уравнений (1) задача построения такого множителя адекватна решению самого уравнения (1) и в квадратурах неразрешима.

2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Известно, что дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами разрешимо в квадратурах и его решение состоит из общего решения однородного уравнения плюс какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Последнее находится либо методом Лагранжа, либо исходя из вида правой части уравнения. Интерес представляет применение предлагаемого подхода к прямому интегрированию уравнения

$$L_n(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = q(x) \tag{7}$$

Используется тот факт, что функция $e^{\lambda x}$ имеет все производные, различающиеся лишь на постоянную величину. С этой целью умножим обе части (7) на $e^{\lambda x}$ и приведем его к виду (1):

$$e^{\lambda x}y^{(n)}+\frac{a_1}{\lambda}\left(\lambda e^{\lambda x}\right)y^{(n-1)}+\frac{a_2}{\lambda^2}\left(\lambda^2 e^{\lambda x}\right)y^{(n-2)}+...+\frac{a_n}{\lambda^n}\left(\lambda^n e^{\lambda x}\right)y=q(x)e^{\lambda x} \tag{8}$$

Чтобы форма $L_n(y)$ была интегрируема, необходимо, чтобы имело место равенство

$$1-\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2}{\lambda^2}-...+(-1)^n\frac{a_n}{\lambda^n}=0 \quad \text{или}$$

$$\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}-...+(-1)^n a_n=0 \tag{9}$$

Из (9) видно, что значения λ в интегрирующем множителе $e^{\lambda x}$ отличаются знаком от корней характеристического уравнения, соответствующего однородному дифференциальному уравнению $L_n(y)=0$:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+...+a_n=0 \tag{10}$$

Итак, пусть известны корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ характеристического уравнения (9), среди которых могут быть вещественные, комплексно сопряженные, простые и кратные.

а) Все корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\lambda_n$, вещественными и различны. Пусть $\lambda=\lambda_1$ в (8). Интегрируемая форма, соответствующая (8), имеет вид

$$\left(e^{\lambda_1 x}y^{(n-1)}\right)'+\left(\frac{a_1}{\lambda_1}-1\right)\left(\lambda_1 e^{\lambda_1 x}y^{(n-2)}\right)'+\left(\frac{a_2}{\lambda_1^2}-\frac{a_1}{\lambda_1}+1\right)\left(\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}y^{(n-3)}\right)'+...$$

$$+\left(\frac{a_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{\lambda_1^{n-2}}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_1}a_1\right)\left(\lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x}y\right)'=q(x)e^{\lambda_1 x}. \tag{11}$$

Интегрируем (11):

$$e^{\lambda_1 x}y^{(n-1)}+(a_1-\lambda_1)\,e^{\lambda_1 x}y^{(n-2)}+...+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\lambda_1+a_{n-3}\lambda_1^2+...+(-1)^{n-1}a_1\right)e^{\lambda_1 x}y=$$

$$=\int q(x)e^{\lambda_1 x}dx+C_1. \tag{12}$$

Подчеркнем, что если a_1 в (9) равен сумме $\sum_{i=1}^n\lambda_n$, а $(-1)^n a_n=\Pi_{i=1}^n\lambda_i$, то в (12) $(a_1-\lambda_1)=\sum_{i=2}^n\lambda_i$, а $\frac{(-1)^n a_n}{\lambda_1}=\Pi_{i=2}^n\lambda_i$. Другими словами, корень λ_1 из (12) исключается, а все оставшиеся $\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ являются корнями и для (12). Переходим к другому интегрирующему множителю $e^{\lambda_2 x}$. С этой целью умножим обе части (12) на $e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$:

$$e^{\lambda_2 x}y^{(n-1)}+(a_1-\lambda_1)\,e^{\lambda_2 x}y^{(n-2)}+...+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\lambda_1+...+(-1)^{n-1}\lambda_1^{(n-1)}\right)e^{\lambda_2 x}y=$$

$$=e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}[\int q(x)e^{\lambda_1 x}dx+C_1]. \tag{13}$$

Если (13) привести к виду (1), записать интегрируемую форму $\overline{L_n(y)}$ и проинтегрировать ее, то получим

$$e^{\lambda_2 x}y^{(n-2)}+(a_1-\lambda_1-\lambda_2)\,e^{\lambda_2 x}y^{(n-3)}+...=\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}[\int q(x)e^{\lambda_1 x}dx+C_1]+C_2. \tag{14}$$

После n-го интегрирования получим

$$y = e^{-\lambda_n x}\int e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x}[\int e^{(\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})x}[...[\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int q(x)e^{\lambda_1 x}dx]...]dx+$$

$$+C_1e^{-\lambda_1 x}+C_2e^{-\lambda_2 x}+...+C_ne^{-\lambda_n x} \tag{15}$$

Любопытно, что двигаясь от (15) обратно, левую часть (7) можно представить в виде обобщенной интегрируемой формы

$$L_n(y) = (...((e^{\lambda_n x}y)'e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x})'...e^{(\lambda_2-\lambda_1)x})' = q(x)e^{\lambda_1 x} \tag{16}$$

В частности, если все корни равны $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$, то (16) примет вид

$$(e^{\lambda x}y)^{(n)} = q(x)e^{\lambda x} \tag{17}$$

а (15) равно

$$y = e^{-\lambda x}\iiint...\int q(x)e^{\lambda x}dx^n + e^{-\lambda x}(C_1+C_2x+...+C_nx^{n-1}). \tag{17'}$$

Обратим внимание, что в зависимости от порядка применения множителей $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, …, $e^{\lambda_n x}$ получаются различные частные решения неоднородного уравнения (7). Их число равно $n!$ и можно выбирать любой порядок. Естественно выбирать такое $e^{\lambda_i x}$, чтобы легче вычислять интегралы. Случаи комплексно сопряженных простых и кратных корней, ввиду громоздкости формул, не рассматриваем.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 3e^{-2x}.$$

Умножим уравнение на $e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x}y''' + 6e^{\lambda x}y'' + 12e^{\lambda x}y' + 8e^{\lambda x}y = 3e^{(\lambda-2)x}. \tag{$*$}$$

Составим характеристическое уравнение для (*):

$$1-\frac{6}{\lambda}+\frac{12}{\lambda^2}-\frac{8}{\lambda^3}=0 \ \text{ или } \ \lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=0 \ \text{ или } \ (\lambda-2)^3=0.$$

Оно имеет корень $\lambda = 2$ кратности 3. Используем формулу (17):

$$(e^{2x}y)''' = 3e^{(2-2)x} = 3,\ \ e^{2x}y = 3\iiint dx^3 = 3\iint xdx^2 = 3\int\frac{x^2}{2}dx = 3\left(\frac{x^3}{6}\right)+C_1x^2+C_2x+C_3$$

Отсюда $y = e^{-2x}\left(\frac{x^3}{2}+C_1x^2+C_2x+C_3\right)$.

3. Эйлеровы уравнения. Рассмотрим обобщенное уравнение Эйлера.

$$(ax+b)^ny^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_ny = q(x). \tag{18}$$

В качестве интегрирующего множителя выберем функцию $(ax+b)^\lambda$ и приведем (18) к виду (1):

$$(ax+b)^{n+\lambda}y^{(n)} + \left(\frac{a_1}{a(n+\lambda)}(a(n+\lambda)(ax+b)^{n+\lambda-1}\right)y^{(n-1)}+...+$$

$$+\frac{a_n}{a^n(n+\lambda)(n+\lambda-1)...(\lambda+1)}\left(a^n(n+\lambda)(n+\lambda-1)...(\lambda+1)(ax+b)^\lambda\right)y == q(x)(ax+b)^\lambda. \tag{19}$$

Характеристическое уравнение для (18) имеет вид

$$a^n(n+\lambda)(n+\lambda-1)...(\lambda+1)-a_1a^{n-1}(n+\lambda-1)...(\lambda+1)+...+(-1)^na_n=0. \tag{20}$$

Уравнение (20) также имеет n вещественных, комплексно сопряженных, простых или кратных корней. Приведем левую часть (18) к интегрируемой форме (2):

$$[(ax+b)^{n+\lambda}y^{(n-1)}]'+\overline{a_1}[((ax+b)^{n+\lambda})'y^{(n-2)}]'+...+\overline{a_{n-1}}[((ax+b)^{n+\lambda})^{(n-1)}y]'=q(x)(ax+b)^{\lambda}. \tag{20$'$}$$

Интегрируем (20$'$):

$$(ax+b)^{n+\lambda}y^{(n-1)}+\overline{a_1}((ax+b)^{n+\lambda})'y^{(n-2)}+...+\overline{a_{n-1}}((ax+b)^{n+\lambda})^{(n-1)}y=$$

$$=\int q(x)(ax+b)^{\lambda}dx+C_1. \tag{21}$$

Пусть в (21) $\lambda=\lambda_1$. Чтобы выполнить следующее интегрирование, необходимо исключить интегрирующий множитель $(ax+b)^{\lambda_1}$ и ввести следующий $(ax+b)^{\lambda_2}$. Необходимо также разделить (21) на $(ax+b)$ для сохранения (21) как уравнения Эйлера. После этих операций (21) примет вид

$$(ax+b)^{n+\lambda_2-1}y^{(n-1)}+(a_1-a(n+\lambda_1))(ax+b)^{n+\lambda_2-2}y^{(n-2)}+...+(a_{n-1}-a_{n-2}a(\lambda_1+1)+$$

$$+a^2a_{n-3}(\lambda_1+1)(\lambda_1+2)-...+(-1)^na^n((\lambda_1+1)...(\lambda_1+n))(ax+b)y=$$

$$=(ax+b)^{\lambda_2-\lambda_1-1}\left[\int q(x)(ax+b)^{\lambda_1}dx+C_1\right]. \tag{22}$$

При следующем интегрировании (22) коэффициент при y, т.е. $\overline{a_{n-1}}$ исчезнет. Другими словами, нет необходимости вычислять $\overline{a_i}$, $\overline{\overline{a_i}}$ и т.д. После n–го интегрирования они исчезнут, а информация о них содержится в λ_1, λ_2, …, λ_n. Итак, выполняя изложенный рекуррентный процесс интегрирования, получим общее решение в виде

$$y=(ax+b)^{-1-\lambda_n}\left\{\int(ax+b)^{\lambda_n-\lambda_{n-1}-1}\left[\int...(ax+b)^{\lambda_2-\lambda_1-1}\left[q(x)(ax+b)^{\lambda_1}dx+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+C_1\right]dx+C_2+...\right]dx\right\}dx. \tag{23}$$

Рассмотрим случаи $n=2$, 3.

а) При $n=2$

$$(ax+b)^2y''+a_1(ax+b)y'+a_2y=q(x). \tag{24}$$

Характеристическое уравнение:

$$a^2(2+\lambda)(1+\lambda)-aa_1(1+\lambda)+a_2=0. \tag{25}$$

Общее решение (λ_1 и λ_2 вещественны и различны):

$$y=(ax+b)^{-1-\lambda_2}\left\{\int(ax+b)^{\lambda_2-\lambda_1-1}\left[\int q(x)(ax+b)^{\lambda_1}dx+C_1\right]-C_2\right\}. \tag{25$'$}$$

Решение однородного уравнения:

$$y = C_1(ax+b)^{-1-\lambda_1} + C_2(ax+b)^{-1-\lambda_2}. \tag{25''}$$

б) При $n = 3$

$$(ax+b)^3 y''' + a_1(ax+b)^2 y'' + a_2(ax+b)y' + a_3 = q(x).$$

Характеристическое уравнение:

$$a^3(3+\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda) - a_1a^2(2+\lambda)(1+\lambda) + a_2a(1+\lambda) - a_3 = 0. \tag{26}$$

Общее решение (λ_1, λ_2, λ_3 вещественны и различны):

$$y = (ax+b)^{-1-\lambda_3}\left\{\int (ax+b)^{\lambda_3-\lambda_2-1}\left[\int (ax+b)^{\lambda_2-\lambda_1-1}\left[\int q(x)(ax+b)^{\lambda_1}dx + C_1\right]dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C_2\right]dx + C_3\right\}. \tag{26'}$$

Решение однородного уравнения:

$$y = C_1(ax+b)^{-1-\lambda_3} + C_2(ax+b)^{-1-\lambda_2} + C_3(ax+b)^{-1-\lambda_1}. \tag{26''}$$

Пример 2. $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -4(2x+1)$.

Строим характеристическое уравнение по (25):

$$4(2+\lambda)(1+\lambda) + 4 - 2(1+\lambda) + 8 = 0; \quad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -2.$$

Для получения общего решения используем (25′):

$$y = (2x+1)\left\{\int (2x+1)^0[(-4)\int (2x+1)^{-2}dx + C_1]dx + C_2\right\} =$$

$$= \frac{(2x+1)(-4)}{-2}\left\{\int \frac{dx}{(2x+1)} + C_1(2x+1) + C_2\right\} = (2x+1)\ln|2x+1| + C_1(2x+1)^2 + C_2(2x+1).$$

Литература

1. Тихонов А.Н., Васильвева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – 3-е изд. – М.: Наука. Физматлит, 1998.

Ивлев Валерий Васильевич,
доктор технических наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского Государственного Гуманитарного Университета
им. М. А. Шолохова.

Баранова Мария Владимировна,
аспирантка кафедры высшей математики
Московского Государственного Гуманитарного Университета
им. М. А. Шолохова.

О некоторых окружностях, связанных с треугольником (окончание)

Алексей Мякишев

Окончание статьи, начатой в двух предыдущих номерах журнала. Примечания к основному тексту вынесены в конец — в отдельный раздел.

§7. Французская+американская помощь или геометрические свойства точек, порождающих окружности

В этом разделе приводятся формулировки и доказательства трех поистине *изумительных* теорем, связанных с найденными точками[1]. Меня, во всяком случае, в своё время они впечатлили изрядно. Говорю об этом, отнюдь не хвастаясь и похваляясь — так как теоремы эти были обнаружены не мною, а (в основном) многократно здесь уже упомянутом выдающимся французским геометром *Жаном-Пьером Эрманном.* Вот как всё было.

Получив *ключевое* уравнение (см. §6, *Утверждение* 6.4) и сообразив, что оно решается, я, наученный горьким опытом, на сей раз отписал *Гиацинтам* не мешкая. В послании #20416 (см. [8]), я описал конструкцию, привел само уравнение и даже его решение[2] и поинтересовался, уже традиционно, степенью новизны полученного результата. И в смысле новизны конструкция не подкачала; однако теперь меня подкарауливали сюрпризы совсем иного рода. Началось с того, что уже через считанные часы откликнулся феерический Жан-Пьер. В сообщении #20417 он привёл формулировку сильно поразившей меня Теоремы 1[3], а в сообщении — и её доказательство — после чего в *Гиацинтах* тема больше не обсуждалась.

И тогда мне подумалось, что неплохо было бы тиснуть статейку — в *Forum Geometricorum*, например, — материала, вроде бы, накопилось достаточно.

— Вот, — строил я планы, — отдохну[4] дней несколько, обмозгую всё хорошенько, забью в компьютер, а затем поднапрягусь, переложу на свой ломаный английский и отправлю редактору Ю. А редактор Ю, знаток не только геометрии, но и редакторского ремесла, разберётся, и, как оно бывало ранее неоднократно, переведет с моего ломаного на нормальный.

Однако события повернулись так, что напрягаться и перекладывать не пришлось.

Черновик фактически уже готовой статьи [9] (вкупе с парой десятков писем) ожидал меня на почтовом ящике *Yahoo*, который автоматом заводился при регистрации на сайте Гиацинтов, и в который я, повинуясь каким-то смутным наитиям, догадался заглянуть[5] лишь дней пятнадцать спустя после ознакомления на сайте Гиацинтов с посланием #20424, которое, как мне показалось, закрыло тему.

Не тут-то было. Как выяснилось, интенсивные обсуждения конструкции между Полем Ю, Жаном-Пьером Эрманном и испанским геометром Гарсия Капитаном (не уверен в правильности последней транскрипции) всё это время продолжали вестись, только уже переместившись в индивидуальные почтовые пространства *Yahoo* — поскольку Полю Ю теорема о принадлежности центров окружностей пересечению двух коник настолько понравилась, что он посчитал её достойной немедленной публикации в своем журнале[6]. Копии писем исправно и регулярно отсылались и мне, но оставались (в силу изложенных выше обстоятельств) до поры – до времени безответными. Когда же возможность отвечать появилась — по существу, отвечать было уже не на что — я был поставлен перед лицом свершившегося факта[7], и оставалось только объяснить *коллегам* (вероятно, несколько озадаченным[8]) причины моего столь затянувшегося молчания.

Такова история возникновения статьи [9][9]. На этом «исторический обзор» заканчиваем и возвращаемся непосредственно к геометрии.

Теорема 1 (Jean-Pierre Ehrmann). *Точки P_1, P_2, P_3, порождающие окружности, суть точки пересечения (отличные от центроида G) следующих двух гипербол*[10]*: Первая гипербола проходит через вершины антидополнительного треугольника $A'B'C'$, центроид G и центр вписанной окружности I треугольника ABC.*

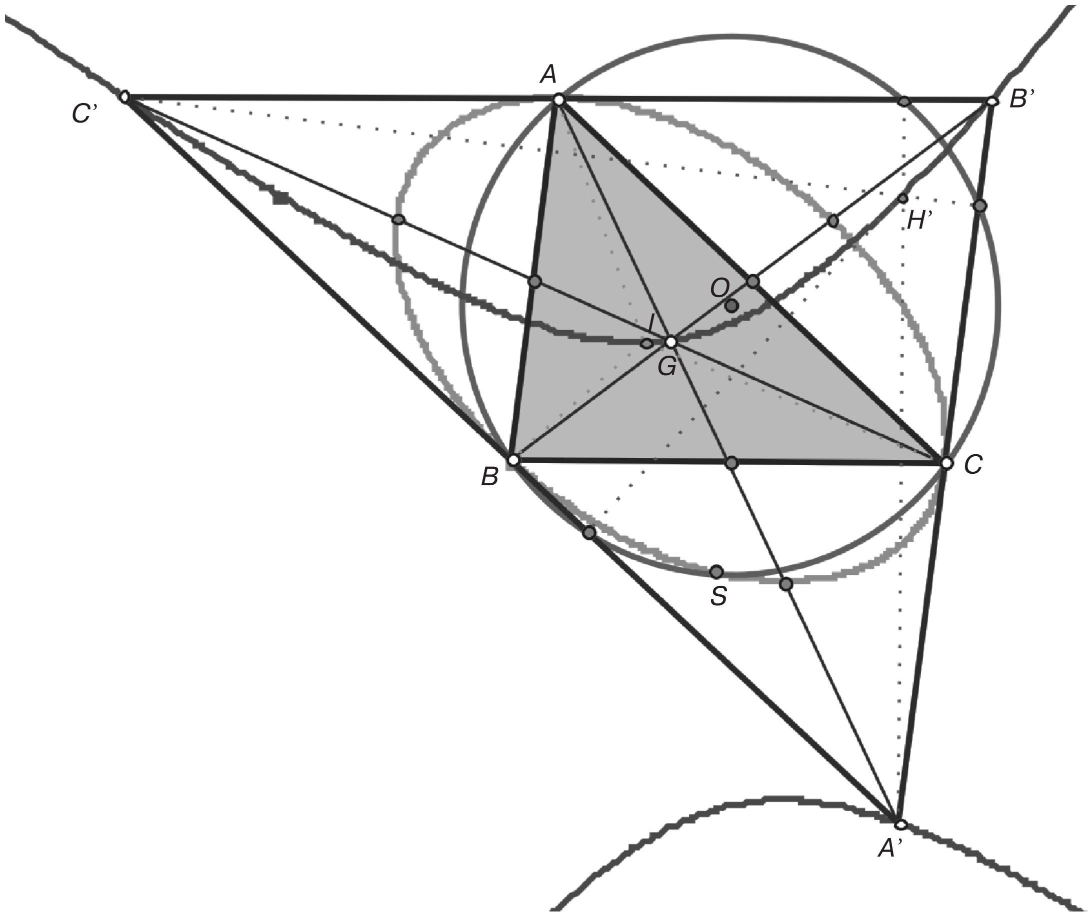


Рис. 1

Эта гипербола — ни что иное, как *гипербола Киперта* антидополнительного треугольника $A'B'C'$, обладающая кучей всяких свойств — см. [1], [7]. Например, она является равносторонней, проходит также через центры вневписанных окружностей, а центром её служит так называемая *точка Штейнера* S (X_{99} в [5], с координатами $(\frac{1}{b^2-c^2} : ... : ...)$, где, как обычно, остальные получаются из первой циклическими сдвигами) — четвертая точка пересечения описанного около ABC эллипса Штейнера с описанной окружностью.

Также она является изогональным (относительно антидополнительного треугольника) образом прямой $O'K'$ и, (довольно неожиданно) геометрическим местом таких точек P, что точка P, изотомически ей сопряженная P_m и изогонально ей сопряженная P_l[11] лежат на одной прямой, [7].

Вторая гипербола проходит через вершины треугольника ABC, его центроид G и точку Лемуана K.

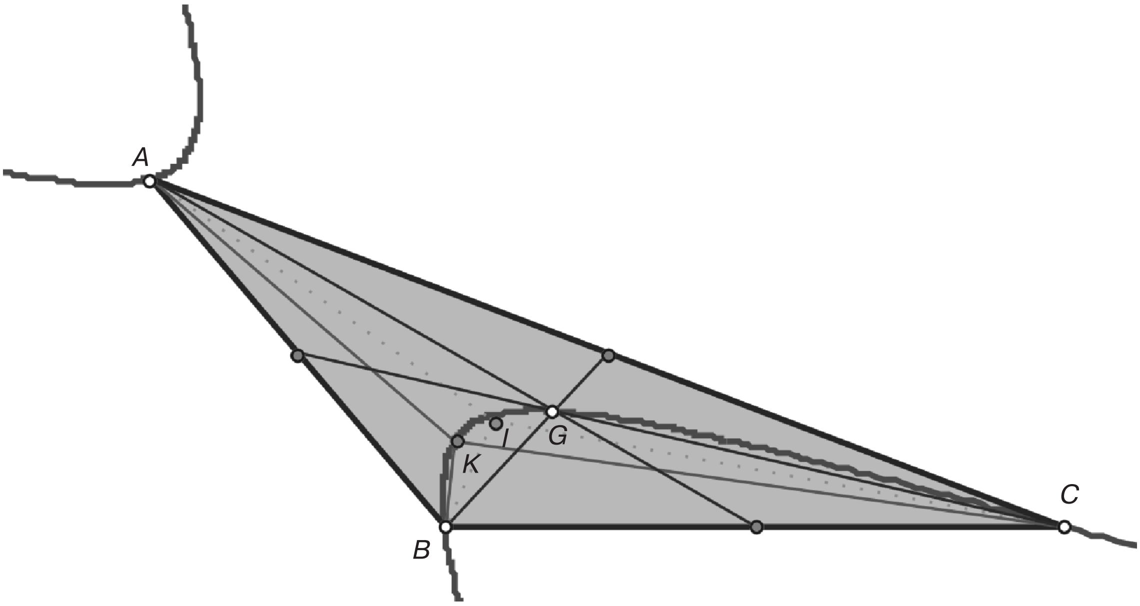


Рис. 2

Эта гипербола (не будучи, отметим, равносторонней) обладает, конечно, значительно меньшим «зарядом замечательности» в сравнении с предыдущей. Тем не менее, укажем на тройку занятных фактов, с нею связанных. Во-первых, она также проходит через точку Парри P (X_{111} в [5], с координатами $\left(\frac{a^2}{b^2+c^2-2a^2} : ... : ...\right)$), которая, будучи изогональным образом бесконечно удаленной точки прямой GK, лежит также и на описанной около ABC окружности. Во-вторых, центром этой гиперболы является точка X_{1084} в [5], с координатами $\left(a^4\left(b^2-c^2\right)^2 : ... : ...\right)$.

В третьих, сама гипербола является изогональным образом прямой GK**12**.

Доказательство. Пусть точка P — любая из трех точек, порождающих окружность. То, что такая точка, в случае разностороннего треугольника, не совпадает с центроидом G, уже было показано ранее, см. *Утверждение* 6.7 §6. Пусть, далее, P имеет некие барицентрические координаты $(p : q : r)$.

Поскольку эта точка порождает окружность, координаты должны удовлетворять ключевому уравнению

$$\frac{p}{(q+r)\,a^2} = \frac{q}{(r+p)\,b^2} = \frac{r}{(p+q)\,c^2}.$$

Тогда должны выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} f = c^2q\,(p+q) - b^2r\,(r+p) = 0 \\ g = a^2r\,(r+q) - c^2p\,(p+q) = 0 \\ h = b^2p\,(p+r) - a^2q\,(q+r) = 0 \end{cases}$$

Сложив все три равенства и произведя несложную перегруппировку слагаемых, приходим к соотношению

$$0 = f+g+h = \left(b^2-c^2\right)p^2 + \left(c^2-a^2\right)q^2 + \left(a^2-b^2\right)r^2.$$

А это означает, что точка P лежит на конике, задаваемой уравнением

$$\left(b^2-c^2\right)u^2 + \left(c^2-a^2\right)v^2 + \left(a^2-b^2\right)w^2 = 0.$$

Очевидно, что координаты точек

$$G\,(1:1:1)\,,\ A'\,(-1:1:1)\,,\ B'\,(1:-1:1)\,,\ C'\,(1:1:-1)\,,\ I\,(a:b:c)$$

этому уравнению удовлетворяют — и потому эта коника совпадает с первой гиперболой[13].

Совершенно аналогично, равенство $a^2f + b^2g + c^2h = 0$ приводит нас к гиперболе, описанной около треугольника ABC и задаваемой уравнением

$$a^2\left(b^2 - c^2\right)vw + b^2\left(c^2 - a^2\right)wu + c^2\left(a^2 - b^2\right)uv = 0.$$

Несложно убедиться в том, что координаты точек $G\,(1:1:1)$ и $K\left(a^2 : b^2 : c^2\right)$ этому уравнению удовлетворяют.

Замечание. В случае равнобедренного треугольника первая гипербола вырождается в пару прямых, одна из которых содержит высоту треугольника, проведенную к основанию, а вторая — сторону антидополнительного треугольника, параллельную основанию.

Вторая гипербола также вырождается в пару прямых, одна из которых содержит ту же высоту, а вторая — основание треугольника.

Это означает, что, конечно же, указанное построение «работает» и в случае равнобедренного треугольника.

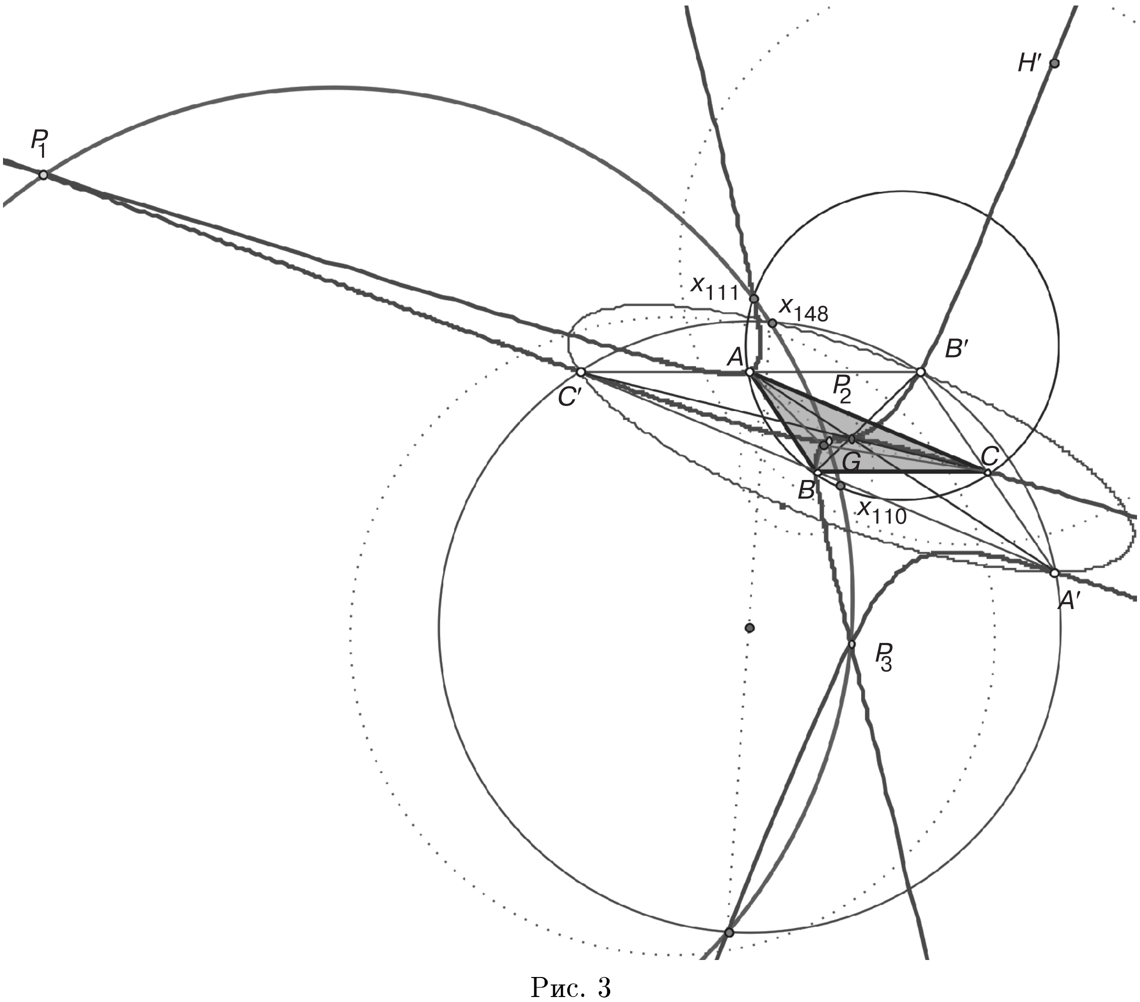


Рис. 3

Теорема 2. (*Jean-Pierre Ehrmann* и *Co*[14]). *Окружность, проходящая через точки* P_1, P_2, P_3, *содержит также следующие четыре точки:*

(1) X_{110} ([5]) — *фокус параболы Киперта,* т. е. параболы, вписанной в треугольник ABC, директриса которой совпадает с *прямой Эйлера* данного треугольника. Эту точку (расположенную на описанной около ABC окружности) можно также получить, отражая прямую Эйлера относительно сторон треугольника ABC. Полученные отражения пересекутся как раз в ней. Кроме

того, X_{110} является *антиподом* (т. е., диаметрально противоположной) точки, изогонально сопряженной бесконечно удаленной точке прямой Эйлера;

(2) X_{111} ([5]) — *точка Парри* (*Parry point*), лежащей на описанной около треугольника ABC окружности и на второй гиперболе, описанной в условии предыдущей теоремы. Она, как уже было отмечено, является точкой, изогонально сопряженной бесконечно удаленной точке прямой GK;

(3) X_{147} ([5]) — *точка Тарри* (*Tarry point*) антидополнительного треугольника $A'B'C'$. Она является четвертой точкой пересечения описанной около треугольника $A'B'C'$ окружности и описанной около него же *гиперболы Киперта* — т. е. на первой из гипербол, описанных в условии теоремы 1.

(4) X_{148} ([5]) — *точка Штейнера* антидополнительного треугольника $A'B'C'$. Это — четвертая точка пересечения описанной около треугольника $A'B'C'$ окружности и *описанного* около него же *эллипса Штейнера* (см. *утверждение* 5.5). При этом X_{147} и X_{148} — антиподы относительно описанной около $A'B'C'$ окружности.

Доказательство. Используем те же идеи, что и при доказательстве теоремы 1.

(А вот попытка доказательства в «лоб», связанная с составление уравнения окружности по координатам точек P_1, P_2, P_3 (такое есть — см. [4], [7]), наверняка привела бы к серьезным вычислительным затруднениям — уж больно тяжеловесны эти координаты[15]!)

А именно, рассмотрим следующее равевство (правда, более затейливое):

$$a^2(c^2-a^2)(a^2-b^2)f+b^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)g+c^2(b^2-c^2)(c^2-a^2)h=0.$$

Это равенство, после соответствующей группировки слагаемых, можно представить в виде:

$$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2yz+b^2zx+c^2xy)+(x+y+z)\cdot(...)=0,$$

где выражение в последних скобках (...) представляет собой следующее выражение:

$$b^2c^2(b^2-c^2)(b^2+c^2-2a^2)x+c^2a^2(c^2-a^2)(c^2+a^2-2b^2)y+a^2b^2(a-b^2)(a^2+b^2-2c^2)z.$$

Это уравнение, конечно, относится к типу уравнений

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(x+y+x)(u_0x+v_0y+z_0x)=0,$$

а они-то и задают окружности (см. [4],[7]).

Теперь, во-первых, заметим, что уравнение $\left(a^2yz+b^2zx+c^2xy\right)=0$ задает описанную около треугольника ABC окружность (см. [4],[7]) и потому координаты точек X_{110} и X_{111} «обнуляют» первую тройку слагаемых левой части уравнения коники, выписанного выше, поскольку обе точки принадлежат описанной окружности.

А во-вторых, легко убедиться непосредственной подстановкой, что координаты этих точек также удовлетворяют уравнению (...) = 0 (задающего, отметим, некоторую прямую), ведь (см.[5]):

$$X_{110}=\left(\frac{a^2}{b^2-c^2}:\frac{b^2}{c^2-a^2}:\frac{c^2}{a^2-b^2}\right)$$

и

$$X_{111}=\left(\frac{a^2}{b^2+c^2-2a^2}:\frac{b^2}{c^2+a^2-2b^2}:\frac{c^2}{a^2+b^2-2c^2}\right).$$

Осталось ещё разобраться с точками X_{147} и X_{148}.

Здесь, применив некий довольно остроумный трюк, можно сча́стливо избежать прямой подстановки координат (также, надо сказать, далеко не сахарных) этих точек в уравнение найденной окружности (обозначим ее буквой ω). А именно, рассмотрим окружность ω_0, полученную из окружности ω посредством гомотетии $H_G^{-\frac{1}{2}}$. Тогда, натурально, ω получается из ω_0 посредством обратной гомотетии H_G^{-2}. Вспомнив теперь лемму из *Утверждения* 3.5 *(пусть заданы* *две точки Q и Q', имеющие относительно треугольника ABC следующие барицентрические координаты:*

$$Q = (p : q : r)\,, \quad Q' = (q + r - p : r + p - q : p + q - r)\,.$$

Тогда гомотетия с центром в центроиде G и коэффициентом -2 переводит точку Q в Q' : $Q' = \mathrm{H}_G^{-2}(Q))$, приходим к такому выводу:

Точка $P(x : y : z) \in \omega_0 \Leftrightarrow P'(y + z - x : z + x - y : x + y - z) \in \omega$.

Отсюда следует, что уравнение окружности ω_0 мы получим, если в уравнении окружности ω совершим замены

$$(x \leftrightarrow y + z - x; y \leftrightarrow z + x - y; z \leftrightarrow x + y - z)\,.$$

И, после соответствующей перегруппировки слагаемых, придем к следующему уравнению окружности ω_0:

$$2\left(b^2 - c^2\right)\left(c^2 - a^2\right)\left(a^2 - b^2\right)\left(a^2yz + b^2zx + c^2xy\right) - (x + y + z) \cdot (...) = 0,$$

где

$$(...) = a^2\left(b^2 - c^2\right)\left(b^4 + c^4 - a^2\left(b^2 + c^2\right)\right)x + \\ + b^2\left(c^2 - a^2\right)\left(c^4 + a^4 - b^2\left(c^2 + a^2\right)\right)y + c^2\left(a^2 - b^2\right)\left(a^4 + b^4 - c^2\left(a^2 + b^2\right)\right)z.$$

Если теперь удастся показать, что на этой окружности лежат: точка

$$X_{98}\left(\frac{1}{b^4 + c^4 - a^2\left(b^2 + c^2\right)} : \quad \frac{1}{c^4 + a^4 - b^2\left(c^2 + a^2\right)} : \frac{1}{a^4 + b^4 - c^2\left(a^2 + b^2\right)}\right)$$

— *точка Тарри* исходного треугольника ABC, см. [5], и ее антипод относительно описанной около ABC окружности — *точка Штейнера* $X_{99}(\frac{1}{b^2-c^2} : \frac{1}{c^2-a^2} : \frac{1}{a^2-b^2})$, см. [5], то теорема 2 будет доказана полностью. Ведь тогда на окружности ω будут лежать гомотетичные образы этих точек (при гомотетии H_G^{-2}), т. е. как раз точки X_{147} и X_{148}.

Но, поскольку обе точки X_{98} иX_{99} лежат на описанной около ABC окружности, при подстановке их координат в ее уравнение $\left(a^2yz + b^2zx + c^2xy\right)$ получим *нуль*. В том же, что и скобка $(...)$ также «зануляется», легко убедиться непосредственной подстановкой.

Теорема 3 (*Jean-Pierre Ehrmann* и *Co*). *Окружности, порожденные точками P_1, P_2, P_3, принадлежат семейству Тукеровых. Их центры расположены на одной прямой, а именно, на прямой OK (O — центр описанной около треугольника ABC окружности), так называемой оси Брокара треугольника ABC,* рис. 4.

Предварительно напомним, что *окружность Тукера* — это окружность, описанная около *шестиугольника Тукера*, который может быть построен следующим образом.

На стороне BC (или ее продолжении) произвольного треугольника ABC выбираем случайным образом некую точку A_1 и из нее проводим *антипараллель*[16] к стороне AC. Пусть она пересекает сторону AB (или ее продолжение) в некоторой точке C_2. Из этой точки проведем *параллель* к BC и отметим точку B_2 ее пересечения с AC. Далее, чередуя антипараллели с параллелями, получим еще три точки на сторонах (или их продолжениях) треугольника ABC, причем шестой шаг *обязательно* вернет нас в исходную точку A_1 (т. е. процесс замыкается на ней). Полученный шестиугольник и есть шестиугольник Тукера. Около него *всегда* можно описать окружность, а его три антипараллели обязательно равны друг другу, рис. 5.

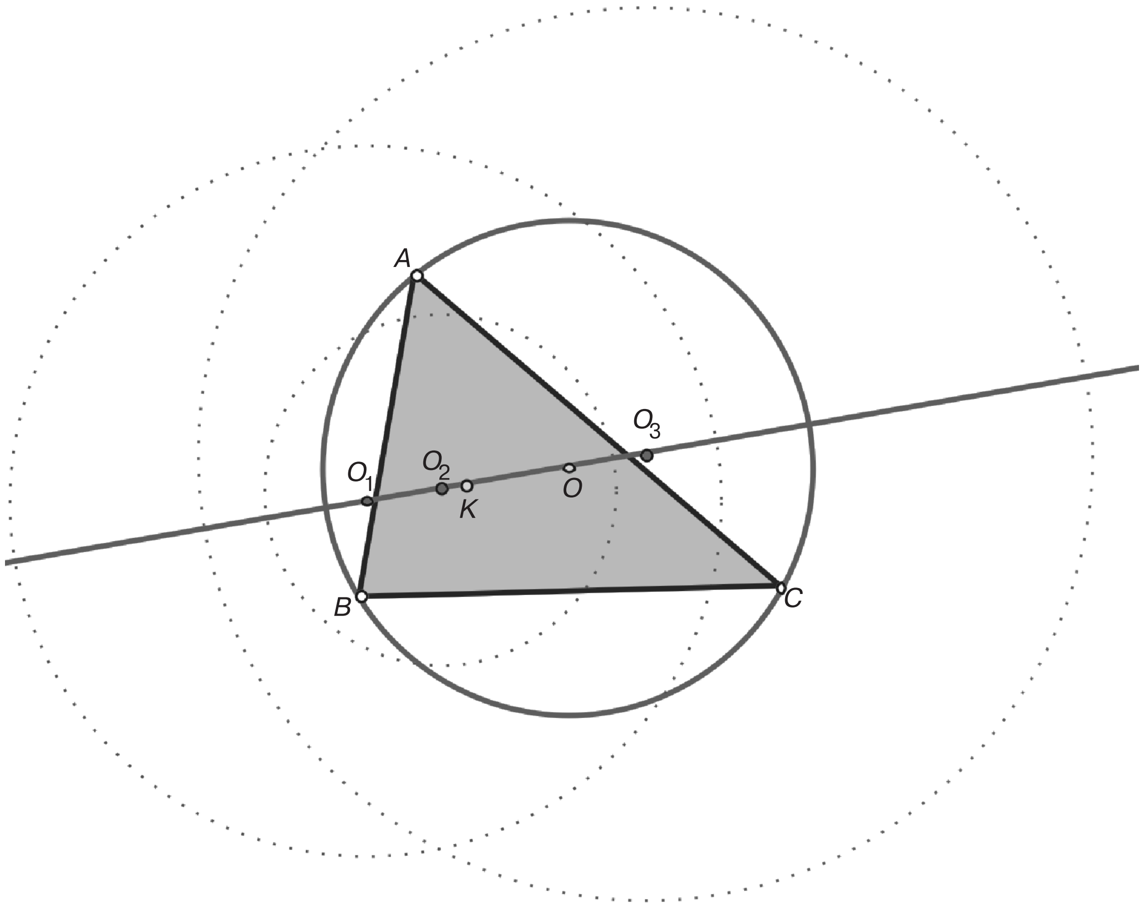


Рис. 4

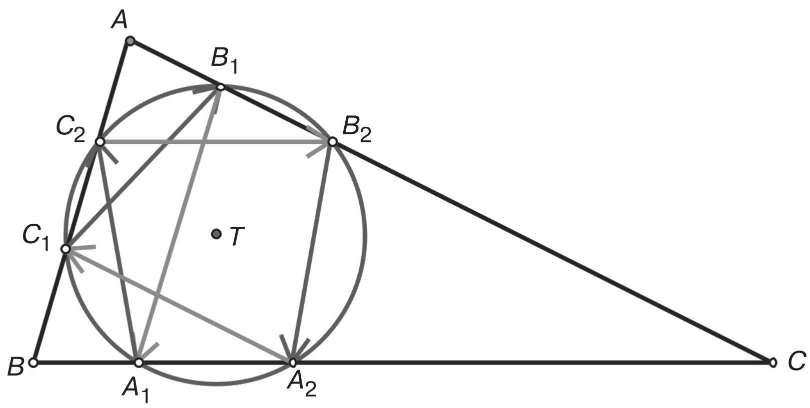


Рис. 5

К Тукеровому семейству, в частности, относятся первая и вторая (когда мы проводим через точку Лемуана не параллели, а антипараллели) окружности Лемуана и окружность Тейлора.

(Обо всем этом и о многих других свойствах окружностей Тукера — см. [6]; [2], з. 5.158–5.162).

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любого представителя семейства построенных нами коник $A_bA_cB_aB_cC_aC_b$ прямые A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b будут соответственно параллельны прямым BC, CA, AB, рис. 6.

Действительно, рассмотрим, например, гомотетию с центром в вершине A и коэффициентом $k = \frac{AA_1}{PA_1}$. Очевидно, что она переводит треугольник PBC в треугольник $A_1A_cA_b$, откуда немедленно вытекает параллельность прямых A_bA_c и BC.

Параллельность двух других пар прямых доказывается аналогично.

Значит, каждая из наших окружностей также будет высекать соответствующие параллели как входящая в рассматриваемое семейство коник.

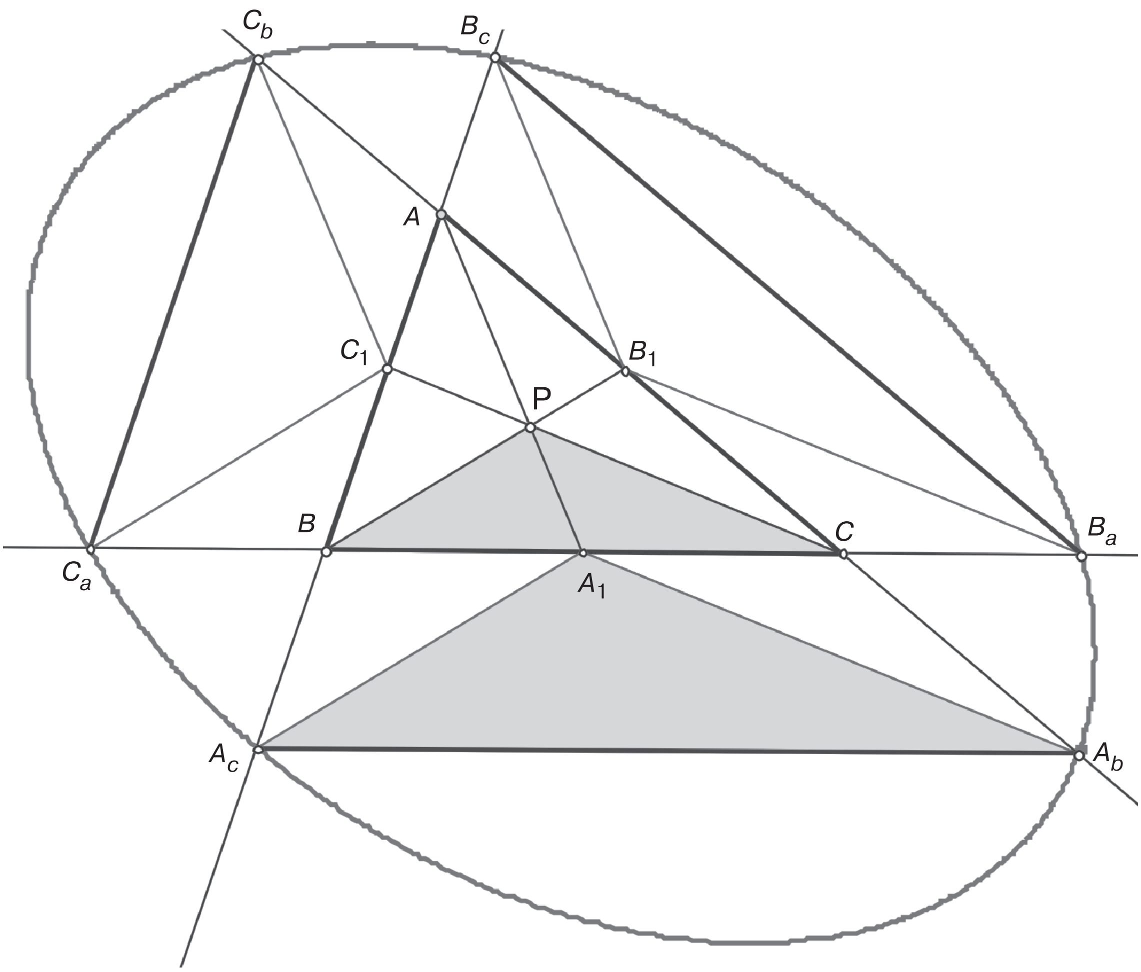


Рис. 6

Однако оказывается справедливым следующее утверждение:

Если некоторая окружность высекает на сторонах (или их продолжениях) треугольника ABC *шестиугольник* $A_bA_cB_aB_cC_aC_b$ *таким образом, что прямые* A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b *соответственно параллельны прямым* BC, CA, AB, *то такой шестиугольник является Тукеровым,* рис. 7.

В самом деле, докажем, например, что в этой ситуации прямая B_aA_b антипараллельна прямой AB (для остальных двух пар доказательство будет аналогичным).

Другими словами, нужно показать, что $\angle CA_bB_a = \angle ABC$, $\angle CB_aA_b = \angle BAC$.

Введем следующие обозначения: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы треугольника ABC при соответствующих вершинах, $\varphi = \angle CA_bB_a$, $\psi = \angle CB_aA_b$, $\theta = \angle C_bB_cA$.

Поскольку трапеция, вписанная в окружность — равнобокая, то соответствующие четверки точек шестивершинника $A_bA_cB_aB_cC_aC_b$ образуют три равнобокие трапеции.

Из рассмотрения трапеции $A_bB_aB_cC_b$ следует, что $\psi + \angle C = \theta + \angle A$ (мы еще воспользовались тем, что углы, образованные парами соответственно параллельных прямых, равны). Равнобокость трапеции $A_cC_aB_cC_b$ позволяет «перекинуть» угол θ из правой (верхней) части трапеции в левую (нижнюю). А тогда рассмотрение трапеции $A_cC_aB_aA_b$ дает нам равенство $\varphi + \angle C = \theta + \angle B$. Вычтя из второго равенства первое, получим, что $\varphi - \psi = \angle B - \angle A$. А теорема о сумме углов треугольника, примененная к треугольникам CA_bB_a и ABC, ведет к равенству $\varphi + \psi = \pi - \angle C = \angle A + \angle B$.

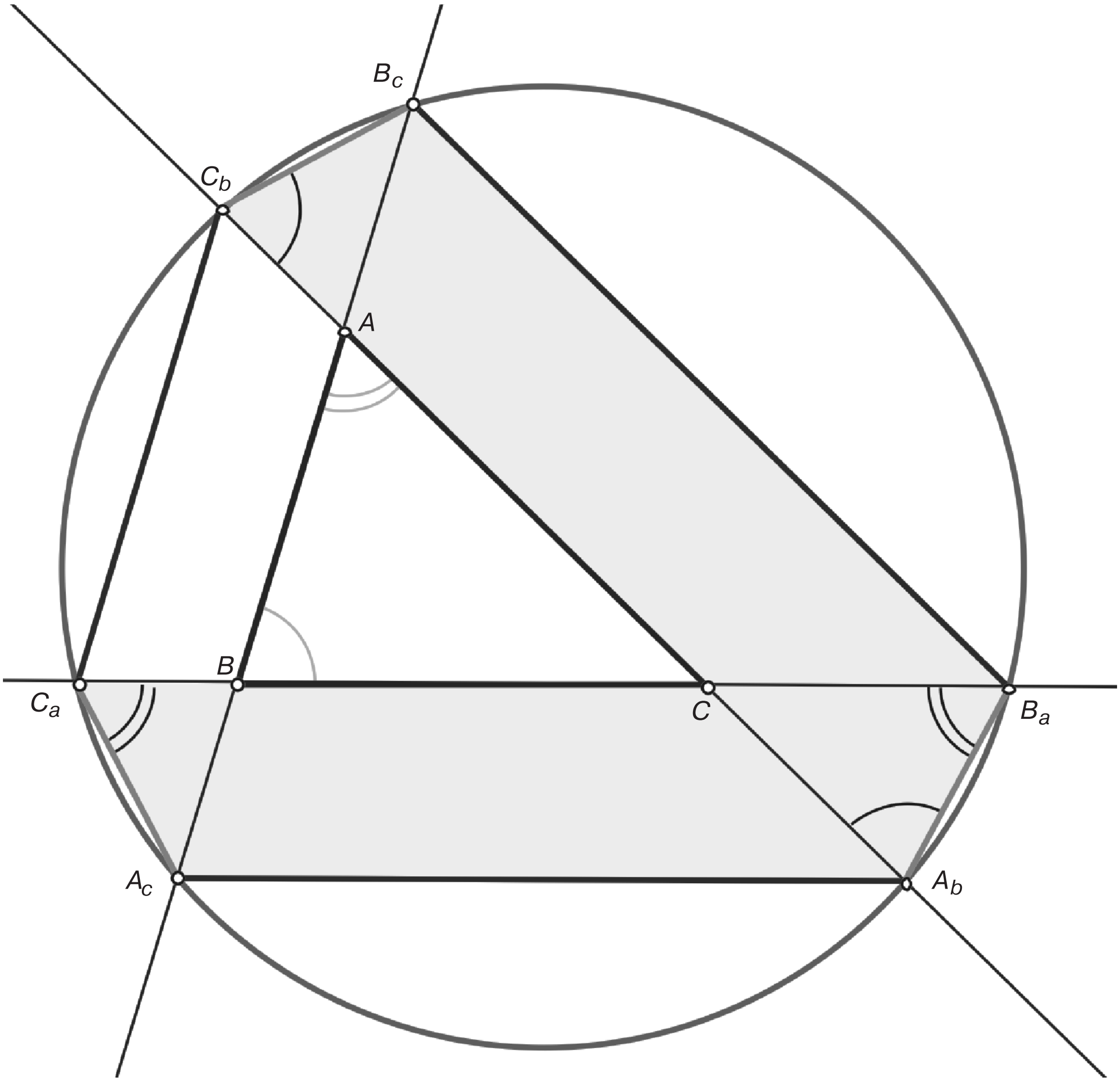


Рис. 7

Пришли, таким образом, к системе:

$$\begin{cases} \varphi + \psi = \angle A + \angle B \\ \varphi - \psi = \angle B - \angle A \end{cases}.$$

Решив ее, убеждаемся в том, что $\varphi = \angle B$, $\psi = \angle A$, что и требовалось.

Наконец, хорошо известно, что центр всякой окружности Тукера, связанной с треугольником ABC, лежит на оси Брокара OK этого треугольника ([2] — 5.160, [6]).

§8. Случай касания во второй конструкции

В заключение обсудим условия вида $s^2 - qr = 0$, $s^2 - rp = 0$, $s^2 - pq = 0$, возникшие как некие «побочные» при выводе уравнения коники в §5 (см. *Утверждение* 5.3).

Для начала отметим, что в этом случае, в отличие от первой конструкции, одновременное выполнение любых двух равенств попросту невозможно.

В самом деле, пусть, например, справедливы первые два. Тогда, перейдя к абсолютным барицентрическим координатам ($s = p + q + r = 1$), получим следующее:

$$\begin{cases} 1 = qr \\ 1 = rp \end{cases} \Rightarrow qr = rp \Rightarrow p = q \text{и} \quad (p + q + r)^2 = qr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 + r^2 + 2qr + 2rp + 2pq = qr \Rightarrow 4p^2 + 3pr + r^2 = 0.$$

Рассмотрев последнее равенство как квадратное уравнение относительно p, видим, что оно не может иметь решений, поскольку его дискриминант $\Delta = 9r^2 - 16r^2 = -7r^2 < 0$.

Пусть теперь выполняется ровно одно равенство из трех, скажем, $s^2 - qr = 0$.

Тогда при выводе уравнения коники по-прежнему выполняются условия $\frac{w}{p} = \frac{u}{r}$ и $\frac{u}{q} = \frac{v}{p}$, из которых (после перемножения) следует, однако, что и $\frac{v}{r} = \frac{w}{q}$. Значит, мы можем рассуждать в точности, как и ранее, и получим в результате все те же окружности, правда с ограничениями на длины сторон исходного треугольника вида $s^2 - qr = 0$.

Геометрически это условие означает, что точки C_a и B_a совпадают, т. е. что наши окружности касаются стороны BC в этой «сдвоенной» точке.

Действительно,

$$C_a = (0 : s : -r) = (0 : -qs : qr) = \left(0 : -qs : s^2\right) = (0 : -q : s) = B_a.$$

И обратно,

$$C_a = (0 : s : -r) = (0 : -q : s) = B_a \Rightarrow -\frac{s}{q} = -\frac{r}{s} \Rightarrow s^2 = qr.$$

Но, оказывается, касание может быть реализовано лишь только для окружности, отвечающей точке P_3.

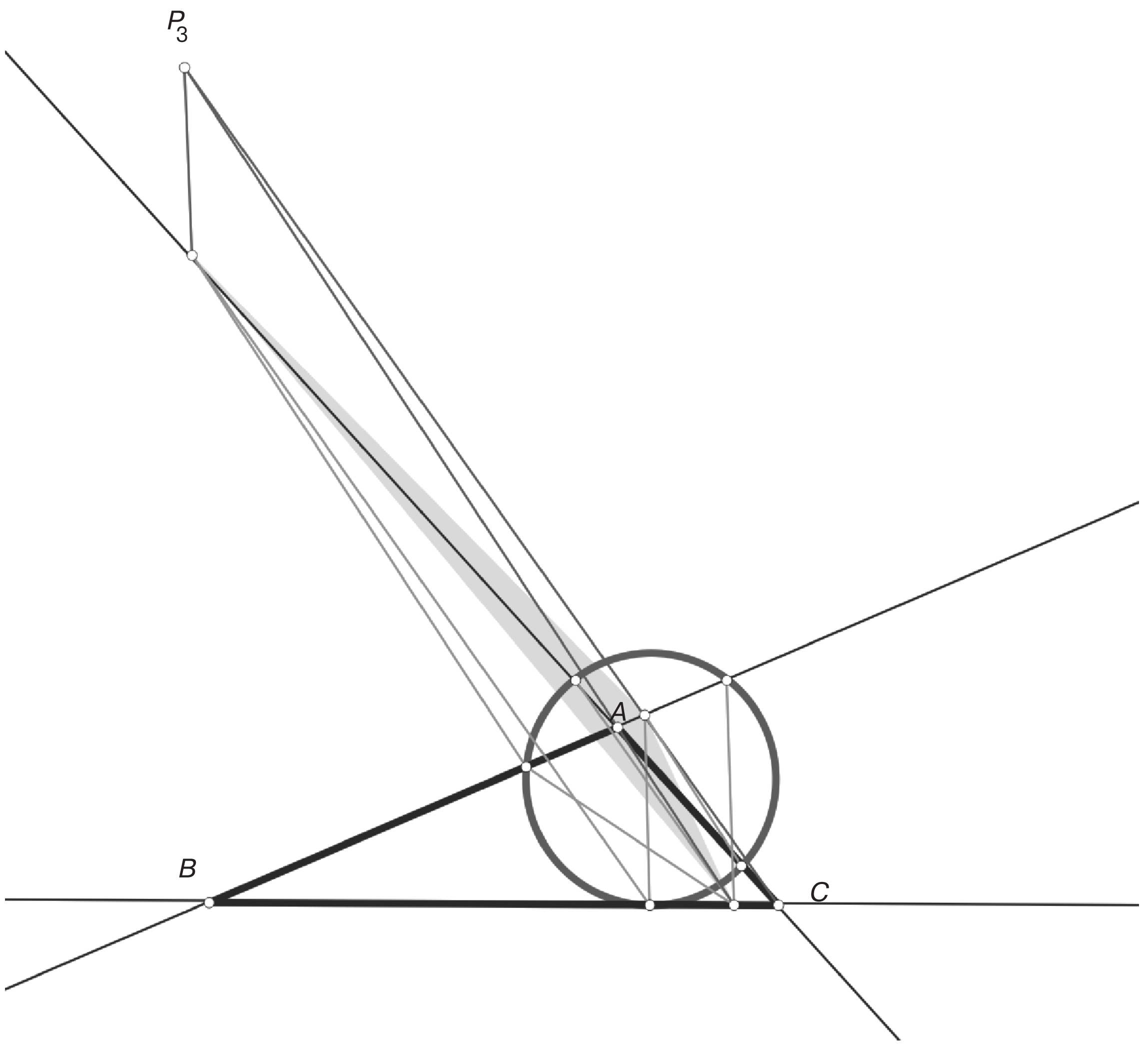


Рис. 8

А именно, справедливо следующее

Утверждение 7.1. *Если выполнено равенство $s^2 - qr = 0$, то касание со стороной BC возможно только для окружности, порожденной точкой P_3, причем существует бесконечное* *множество различных треугольников, реализующих случай касания. Их длины сторон при этом удовлетворяют условию $x^3+2x^2y+2y^2x+y^3-x^2-y^2=0$, где $0<x=\frac{b^2}{a^2}<1$ и $0<y=\frac{c^2}{a^2}<1$ (т. е. сторона BC обязательно наибольшая в таких треугольниках).*

Доказательство. Все выкладки удобно, разумеется, проводить в абсолютных барицентрических координатах — ведь именно в них мы получили выражения для координат P_k $(k=1,2,3)$:

$$P_k=\left(p_k=\frac{1}{1+p_k'}:q_k=\frac{1}{1+q_k'}:r_k=\frac{1}{1+r_k'}\right),$$

где

$$p_k'=\frac{C}{a^2}\sin\left(\frac{\varphi+2\pi\,(k-1)}{3}\right),\ q_k'=\frac{C}{b^2}\sin\left(\frac{\varphi+2\pi\,(k-1)}{3}\right),\ r_k'=\frac{C}{c^2}\sin\left(\frac{\varphi+2\pi\,(k-1)}{3}\right)$$

и

$$C=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

$$\varphi=\arcsin\left(-8a^2b^2c^2C^{-3}\right)=\arcsin\left(-3\sqrt{3}\frac{a^2b^2c^2}{\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\right).$$

(Откуда, в частности, получаем оценки $\varphi_1\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)\Rightarrow\sin\varphi_1\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $\varphi_2\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow\sin\varphi_2\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, $\varphi_3\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow\sin\varphi_3\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, которые будем использовать в дальнейшем).

Из условия следует, что $q_kr_k=1\Leftrightarrow\frac{1}{1+q_k'}\cdot\frac{1}{1+r_k'}=1\Leftrightarrow\left(1+q_k'\right)\left(1+r_k'\right)=1\Leftrightarrow q_k'+r_k'=$ $=-q_k'\cdot r_k'$. Поскольку при $k=2$ имеем $q_2'>0$ и $r_2'>0$, точку P_2 сразу можно отбросить, ибо последнее равенство для нее выполняться не может.

А при $k=1$ или $k=3$ перепишем сначала эти равенства в несколько ином виде:

$$q_k'+r_k'=-q_k'\cdot r_k'\Leftrightarrow\frac{C}{b^2}\sin\varphi_k+\frac{C}{c^2}\sin\varphi_k=-\frac{C^2\sin^2\varphi_k}{b^2c^2}\Leftrightarrow\frac{b^2+c^2}{C}=-\sin\varphi_k,$$

а затем избавимся от входящей в них тригонометрии. При $k=1$ получим:

$$\frac{b^2+c^2}{C}=-\sin\varphi_1=-\sin(\frac{1}{3}\arcsin\frac{-8a^2b^2c^2}{C^3})=\sin(\frac{1}{3}\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3}),$$

последнее ввиду нечетности функций $\sin x$ и $\arcsin x$. И, так как $-\varphi_1\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\subset$ $\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\frac{b^2+c^2}{C}=\sin(\frac{1}{3}\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3})\Leftrightarrow\arcsin\left(\frac{b^2+c^2}{C}\right)=\frac{1}{3}\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\arcsin\left(\frac{b^2+c^2}{C}\right)=\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3}.$$

«Просинусировав» теперь обе части этого равенства при помощи формулы $\sin 3\varphi=$ $=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$, получим уравнение — *следствие*, или *необходимое условие* того, что точка P_1 порождает касающуюся окружность:

$$\Rightarrow 3\frac{b^2+c^2}{C}-4\frac{\left(b^2+c^2\right)^3}{C^3}=8\frac{a^2b^2c^2}{C^3}\Leftrightarrow 3C^2\left(b^2+c^2\right)-4\left(b^2+c^2\right)^3=8a^2b^2c^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left(b^2+c^2\right)-4\left(b^2+c^2\right)^3=8a^2b^2c^2.$$

После сокращения на 4, деления на a^6 и замены $x = \frac{b^2}{a^2}, y = \frac{c^2}{a^2}$ получим уравнение некоторой *кубики*, т.е., кубической кривой на плоскости, задаваемой многочленом от двух переменных третьей степени:

$$(x+y)^3 - (x+y+xy)(x+y) + 2xy = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2y^2x + y^3 - x^2 - y^2 = 0.$$

И точно такое же необходимое условие получим для точки P_3 при $k = 3$:

$$\frac{b^2+c^2}{C} = -\sin(\frac{1}{3}(\arcsin\frac{-8a^2b^2c^2}{C^3} + 4\pi),$$

причём

$$\varphi_3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \subset \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Значит,

$$-\arcsin\left(\frac{b^2+c^2}{C}\right) = \pi - \frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{-8a^2b^2c^2}{C^3} + 4\pi\right) =$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{-8a^2b^2c^2}{C^3} + \pi\right) = \frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3} - \pi\right),$$

т. е.

$$\arcsin\left(\frac{b^2+c^2}{C}\right) = \frac{1}{3}\left(-\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3} + \pi\right),$$

т. е.

$$3\arcsin\left(\frac{b^2+c^2}{C}\right) = -\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3} + \pi.$$

А поскольку $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$, получаем всё то же уравнение кривой.

Итак, мы получили *кубическую*[17] кривую, в общем случае уравнение которой имеет вид

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0$$

(а в нашем конкретном: $A = D = 1$, $B = C = \frac{2}{3}$, $E = G = -\frac{1}{3}$, $F = H = K = L$).

Такие кривые одним из первых исследовал великий Исаак Ньютон. Он же предложил и свою систему их классификации. Оказалось, определяющую роль в этой классификации играет уравнение $A + 3Bk + 3Ck^2 + Dk^3 = 0$ — вид кривой существенно зависит от количества его действительных и комплексных корней и их кратности.

Для нашей кубики оно запишется так: $1 + 2k + 2k^2 + k^3 = 0 \Leftrightarrow (k+1)\left(k^2+k+1\right) = 0$. Как видим, действительный корень у него ровно один. Ньютон обозвал кубики, удовлетворяющие этому свойству, *hyperbolae defectivae* (дефективными гиперболами!).

Кстати, вышеприведенное уравнение определяет также угловые коэффициенты асимптот, если они имеются. Не откажем себе в удовольствии, и найдем асимптоту в нашем случае.

Итак, пусть уравнение асимптоты $y = kx + b$. Угловой коэффициент мы уже вычислили: $k = -1$.

А b определяется из уравнения (см. [3]) $\left(B + 2Ck + Dk^2\right)b = -\left(E + 2Fk + Gk^2\right)$, т. е. $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 1\right)b = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = 2$ и асимптота найдена: $y = 2 - x$.

Эскиз графика кривой $x^3 + 2x^2y + 2y^2x + y^3 - x^2 - y^2 = 0$ приведен ниже. (Имеется еще изолированная точка $(0,0)$). Мы построили его с помощью программы *Advanced Grapher*, но можно поступить и «по-честному».

Дело в том, что кубические кривые вида

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 = 0$$

(имеющие так называемую «двойную» точку) допускают, ввиду однородности, *рациональную параметризацию*:

$$x = -\frac{3\left(E + 2Ft + Gt^2\right)}{A + 3Bt + 3Ct^2 + Dt^3} = \frac{1+t^2}{(1+t)\left(1+t+t^2\right)}$$

(в нашем случае), $y = tx$ — и потому легко поддаются стандартным методам построения — с помощью производных[18].

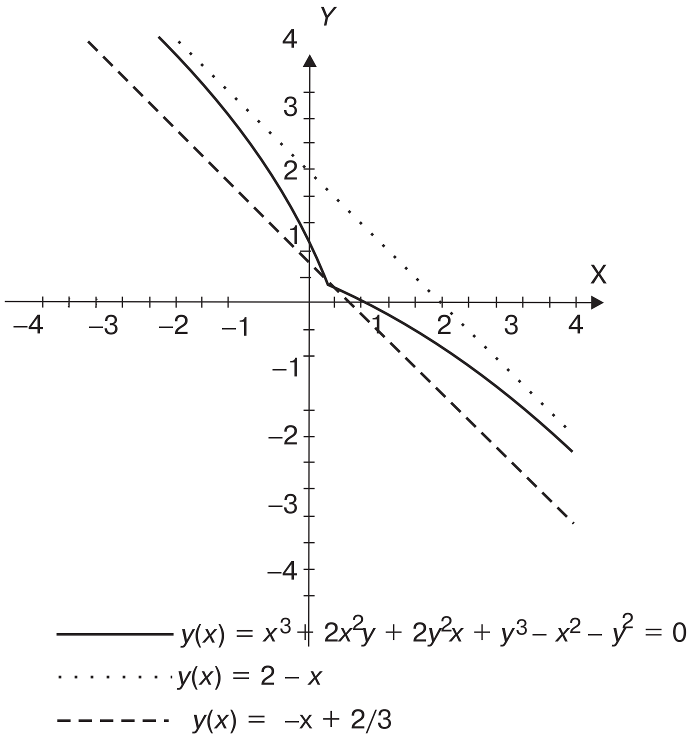


Рис. 9

Итак, порядка ради и справедливости для (математика всё-таки!), построим возникшую кубику «по науке».

Сначала заметим, что она симметрична относительно прямой $y = x$ (так как не меняется при перестановке местами переменных $x \leftrightarrow y$). Назовем точку, в которой прямая $y = x$ пересекает кубику, *вершинной*. Подставив в кубику всюду x вместо y и решив уравнение $6x^3 - 2x^2 = 0$, найдем её координаты: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *Касательная* к кубике в этой точке (перпендикулярная прямой $y = x$) имеет уравнение $y = -x + \frac{2}{3}$. Действительно, как указано в любом порядочном учебнике по матанализу, уравнение касательной к неявной функции $F(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) ищется как $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y - x_0) = 0$.

У нас же $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x$ и $\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$. Аналогично, и $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$.

А потому, после сокращения на этот общий множитель, как раз получаем уравнение $x+y = \frac{2}{3}$.

Покажем далее, что график кубики расположен *выше* касательной. Для этого воспользуемся рациональной параметризацией:

$$x + y \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1+t^2}{1+t+t^2} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 \geq 1 \Leftrightarrow (t-1)^2 \geq 1.$$

Наконец, покажем, что кубика всюду *убывает* — т. е. что $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} < 0$. Поскольку $y = tx$, то $y'(t) = x(t) + tx'(t)$ и $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{x(t)}{x'(t)} + t$.

Произведенные согласно всем положенным правилам вычисления производных, дают, после надлежащих раскрытий скобок и приведений подобных, следующее выражение для производной:

$$y'(x) = t - \frac{\left(1+t^2\right)(1+t)\left(1+t+t^2\right)}{t^4 + t^2 + 2t + 2} = -\frac{2t^4 + 2t^3 + t^2 + 1}{t^4 + t^2 + 2t + 2}.$$

Но $t^4 + \left(t^2 + 2t + 2\right) > 0$, поскольку дискриминант квадратичной функции, заключенной в скобки, явно *отрицателен*. По той же причине и

$$2t^4 + 2t^3 + t^2 + 1 = t^2\left(2t^2 + 2t + 1\right) + 1 > 0.$$

Стало быть, $y'(x) < 0$.

Можно бы ещё попробовать отыскать точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости — однако, довольно, пожалуй. На самом деле, для наших целей важнее всего доказанное неравенство о расположении кубики над соответствующей касательной.

Обратимся же теперь к условиям вида $\frac{b^2+c^2}{C} = -\sin\varphi_k$, $k = 1, 3$. Оказывается, что они накладывают на x и y определенные ограничения.

Действительно, поскольку $-\sin\varphi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то для P_1 должно выполнятся неравенство $\frac{b^2+c^2}{C} < \frac{1}{2}$. И поскольку $-\sin\varphi_3 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — для P_3 двойное неравенство $\frac{1}{2} < \frac{b^2+c^2}{C} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, ситуация почти окончательно проясняется после построения двух *граничных коник*:

$$\frac{b^2+c^2}{C} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\left(b^2+c^2\right)^2 = \left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \Leftrightarrow$$

(после деления на a^4)

$$3(x+y)^2 = x + y + xy \Leftrightarrow 3x^2 + 5xy + 3y^2 - x - y = 0.$$

$$\frac{b^2+c^2}{C} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(b^2+c^2\right)^2 = \left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 - x - y = 0,$$

Advanced Grapher услужливо нарисует нам два эллипса, касающихся друг друга в начале координат.

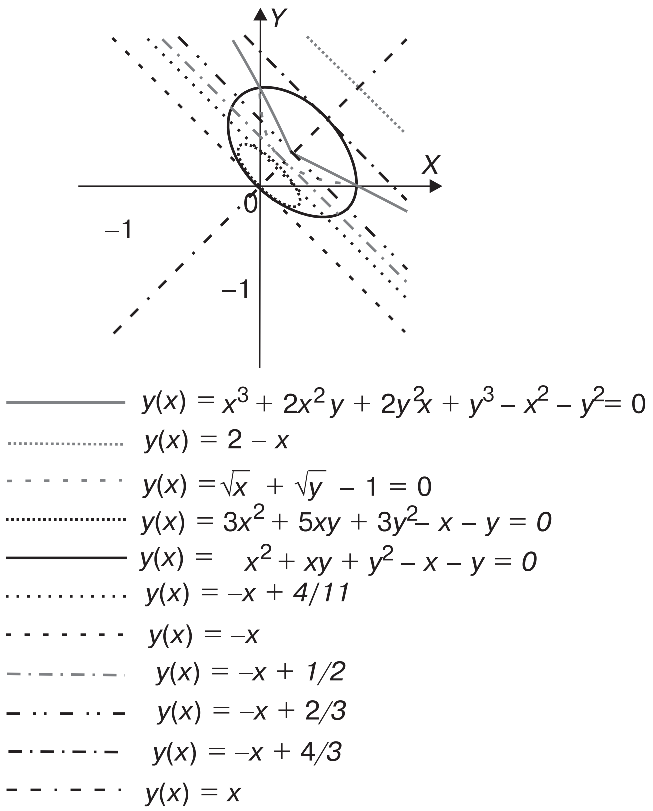


Рис. 10

Что же говорит нам эта картинка? А говорит она, во-первых, о том, что точку P_1 также следует исключить, ведь точки плоскости, отвечающие касанию в этом случае, должны обязательно попадать внутрь меньшего эллипса, а он с кубической кривой не пересекается.

Во-вторых, рисунок свидетельствует о том, что если и есть решения для точки P_3, то они должны удовлетворять условиям $0 < x = \frac{b^2}{a^2} < 1$, $0 < y = \frac{c^2}{a^2} < 1$ — т. е. a — наибольшая сторона треугольника. Потому из трех неравенств треугольника два выполняются автоматически, а третье ведет к появлению неравенства $b + c > a \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} > 1$. Добавим на картинку, для полноты, граничное условие $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (строится как угодно).

И вот, мы видим — для точек типа P_3 никаких противоречий не возникло: соответствующие им точки (x, y) должны лежать на найденной нами кубической кривой, попадать в полосу, ограниченную обоими эллипсами, и находиться выше кривой, определенной неравенством треугольника, и все это вполне возможно.

Наведем и здесь некоторый порядок, т. е. разберемся, почему получается именно такой рисунок — не ссылаясь на безусловно непререкаемый авторитет мудрого *Advanced Grapher*'a.

Остановимся более-менее подробно на уравнении $3x^2 + 5xy + 3y^2 - x - y = 0$, поскольку остальные поддаются аналогичным «разборкам».

Подстановка в уравнение x вместо y дает соотношение $11x^2 - 2x = 0$ и, следовательно, координаты «вершинной» точки $\left(\frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right)$. Уравнение же касательной, сосчитанное по уже известному образцу, в этой точке примет вид: $x + y = \frac{4}{11}$.

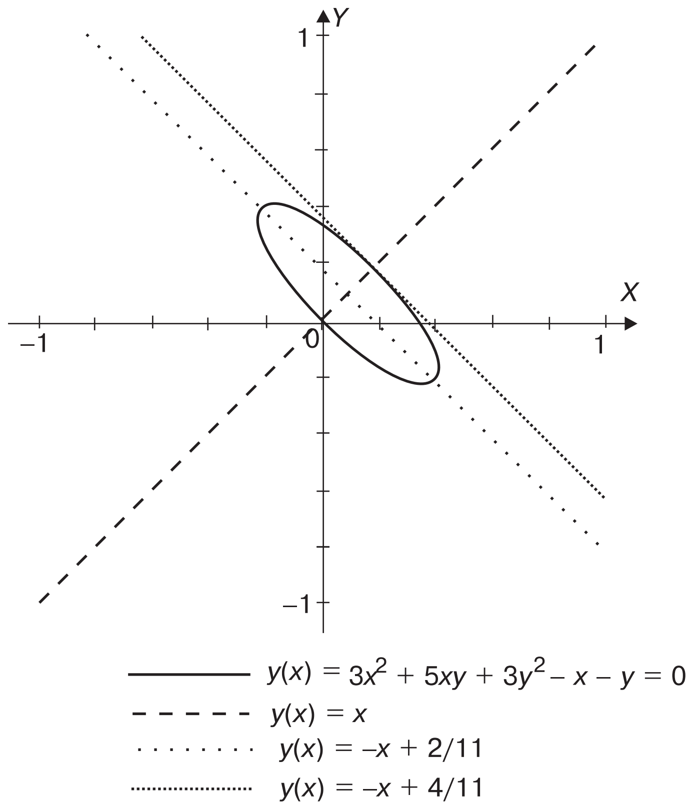


Рис. 11

Покажем, что график соответствующей кривой будет расположен *ниже* касательной, т. е. что для всех её точек справедливо неравенство $x + y \leq \frac{4}{11}$.

Для этого повернем оси вокруг начала координат на $-\frac{\pi}{4}$ и затем перенесем начало в точку $\left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$[19].

Хорошо известно, что после поворота старые координаты (x, y) и новые (x', y') связаны соотношениями

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x\cos(-\frac{\pi}{4}) - y\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ y' = x\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{array}\right. .$$

Подставив последние два равенства в уравнение, получим его вид после поворота на $-45°$: $\frac{11}{2}x'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' + y'^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{11}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{11}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)} = 1$. Или, после еще и переноса: $\frac{x»^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{11}\right)^2} + \frac{y»^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)} = 1$ — уравнение соответствующего эллипса в главных осях.

Но тогда, очевидно, $x» \le \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow x' - \sqrt{2} \le \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow x' \le \frac{2\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \le \frac{2\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + y \le \frac{4}{11}$.

Ровно таким же образом можно совершенно строго доказать, что для кривой (эллипса) $x^2 + xy + y^2 - x - y = 0$ «вершинной» является точка с координатами $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, касательная в которой задается уравнением $x+y = \frac{4}{3}$, а все точки кривой расположены ниже этой прямой, т. е. $x+y \le \frac{4}{3}$. А для кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ — точка $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ с касательной $y + x = \frac{1}{2}$ в ней, причем для всех точек кривой справедливо неравенство $y + x \ge \frac{1}{2}$, т. е. она расположена над указанной касательной.

Что же остается ещё? Остаётся только показать, что решение уравнения

$$\arcsin\left(\frac{b^2+c^2}{C}\right) = \frac{1}{3}\left(-\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3} + \pi\right)$$

(см. выше) всегда *существует*.

Перейдя к переменным $0 < x < 1{,}0 < y < 1$, переформулируем задачу: надо доказать, что уравнение

$$f\left(x,y\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x+y+xy}} + \frac{1}{3}\arcsin 3\sqrt{3}\cdot\frac{xy}{\left(x+y+xy\right)\sqrt{x+y+xy}} - \frac{\pi}{3} = 0$$

имеет решение относительно x при любом фиксированном значении y.

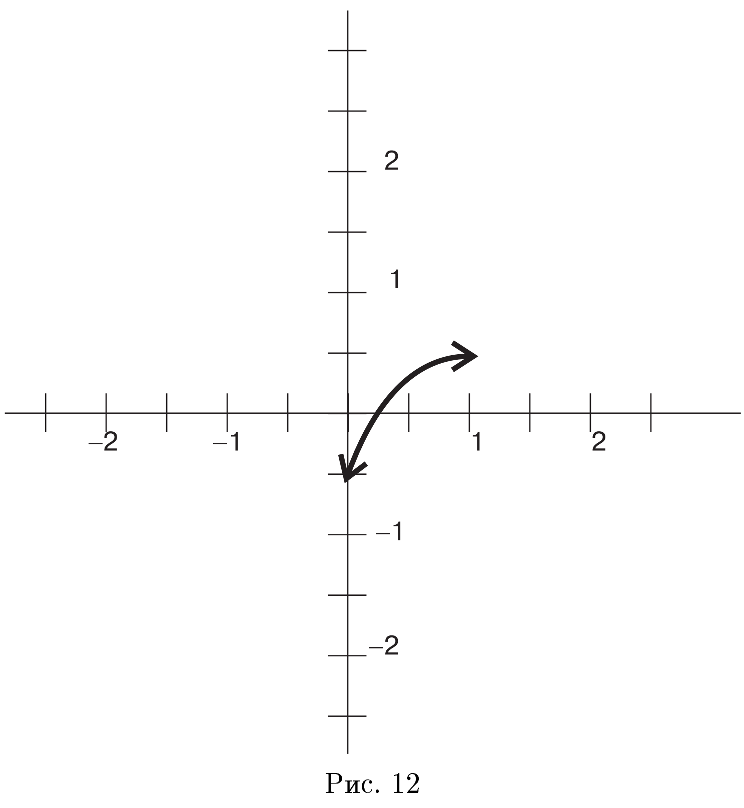


Рис. 12

Вообще-то, прекрасно с этим справляется программа *The Geometer's Sketchpad* (*Живая Геометрия* в отечественной транскрипции), рисующая в числе всего прочего также и семейство графиков функции, зависящей от параметра. Например, график $f(x,y)$ при значении параметра $y = 0,43$ показан на рис. 12.

Но, и здесь поступим «по-честному», т. е. приведем строгое доказательство. Для чего рассмотрим непрерывную на отрезке $[0;1]$ функцию

$$f\left(x,y_0\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x+y_0}{\sqrt{x+y_0+xy_0}} + \frac{1}{3}\arcsin 3\sqrt{3}\cdot\frac{xy_0}{\left(x+y_0+xy_0\right)\sqrt{x+y_0+xy_0}} - \frac{\pi}{3}$$

и покажем, что при любом $y_0 \in (0;1)$ выполнены неравенства $f\left(0,y_0\right) < 0$ и $f\left(1,y_0\right) > 0$ — тогда из теоремы о нуле непрерывной функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков, будет вытекать разрешимость нашего уравнения.

С первым неравенством просто, поскольку

$$f\left(0,y_0\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{y_0} - \frac{\pi}{3}$$

и

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{y_0} - \frac{\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{y_0} < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

(в силу монотонного возрастания арксинуса)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{y_0} < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{y_0} < 1 \Leftrightarrow 0 < y_0 < 1.$$

Со вторым же придется немного повозиться:

$$f\left(1,y_0\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+y_0}{\sqrt{1+2y_0}} + \frac{1}{3}\arcsin 3\sqrt{3}\cdot\frac{y_0}{\left(1+2y_0\right)\sqrt{1+2y_0}} - \frac{\pi}{3}.$$

Значит, $f\left(1,y_0\right) > 0 \Leftrightarrow 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+y_0}{\sqrt{1+2y_0}} + \arcsin 3\sqrt{3}\cdot\frac{y_0}{(1+2y_0)\sqrt{1+2y_0}} > \pi$.

Рассмотрим теперь функцию

$$f\left(y\right) = 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+y\right)\left(1+2y\right)^{-\frac{1}{2}} + \arcsin 3\sqrt{3}\cdot y\left(1+2y\right)^{-\frac{3}{2}}$$

при $y \in [0;1]$ и заметим, что $f\left(0\right) = 3\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi$.

Дело будет, наконец, сделано, если докажем, что $f\left(y\right)$ монотонно возрастает на своей области определения — ибо тогда $\forall y_0,\ 1 > y_0 > 0 \Rightarrow f\left(y_0\right) > f\left(0\right) = \pi$.

Производная этой функции не из самых приятных, но всё же поддается, как это у них, у производных, водится, вычислению. Применив ряд надлежащих правил, получим после некоторых усилий: $f'\left(y\right) = \frac{3\sqrt{3}}{(1+2y)^2}\left(\frac{y\sqrt{4(1+2y)-3(1+y)^2}}{4} + \frac{(1-y)\sqrt{(1+2y)^3-27y^2}}{1+2y}\right)$(проверьте!).

Очевидно, что $f'\left(y\right) > 0$ при $1 > y > 0$.

§9. Продолжение всегда следует

Согласно некоторым литературным канонам, считается *комильфо*, если произведение обладает своеобразной *закольцованностью*, т. е. когда окончание текста перекликается с его началом[20].

Появившаяся в *Forum Geometricorum* статья [10][21] подарила счастливую возможность завершить данное сочинение подобным образом.

Освежив в памяти конструкцию, связанную с *окружностью Ламун*а (для чего следует на секундочку вернуться в §1, пункт 1.5), пробежимся коротко по содержанию заметки [10].

DGL-коника[22].

Через произвольную (но не лежащую на прямых, содержащих стороны данного треугольника ABC или на описанной около него окружности) точку P провели прямые AP, BP и CP, а затем отметили точки A_1, B_1, C_1 их пересечения с описанной около ABC окружностью и, наконец, центры окружностей, описанных около шести треугольников PBA_1, PCA_1, PCB_1, PBB_1, PAC_1, PBC_1: точки $B_c, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$*соответственно.*

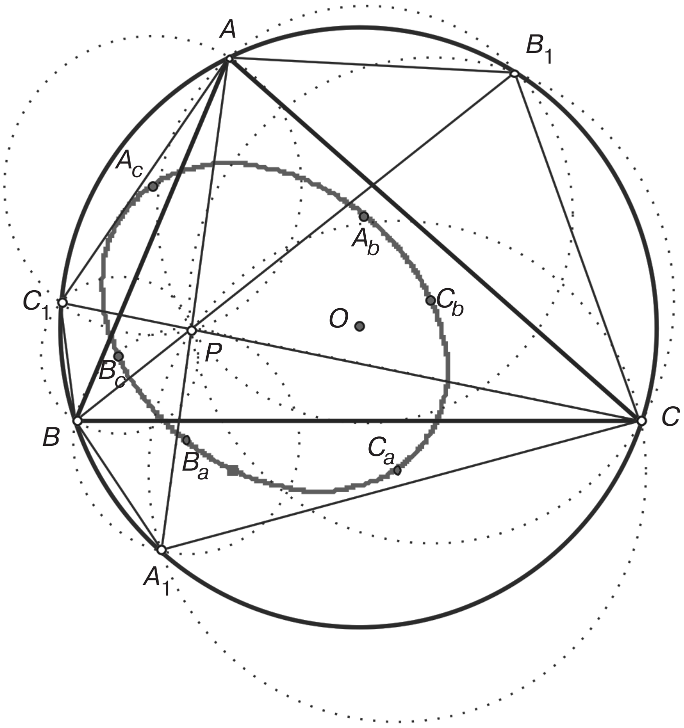


Рис. 13

Тогда все шесть центров лежат на одной конике.

Доказывается, как и в случае конструкции, ведущей к окружности Ламуна: посредством обратной теоремы Паскаля.

Возникает естественный вопрос: а при каких положениях точек P (буде таковые найдутся) коника обращается в окружность?

Авторы дают исчерпывающий ответ на него.

DGL-окружности, рис. 14.

Для любого остроугольного треугольника ABC существуют ровно две точки P_1 и P_2, порождающие окружности. Обе они точки расположены на прямой Эйлера исходного треугольника и могут быть построены линейкой и циркулем следующим образом:

1. *Рассмотрим треугольник $A_0B_0C_0$ — серединный для остроугольного треугольника ABC.*

2. *Построим три окружности Аполлония треугольника $A_0B_0C_0$ и каждую из них отразим симметрично относительно серединного перпендикуляра к соответствующей стороне серединного треугольника (так, окружность Аполлония, содержащую вершину A_0, отразим относительно серединного перпендикуляра к отрезку B_0C_0 и т. п.).*

3. *Три «отраженные» окружности пересекутся в двух точках — аккурат в точках P_1* и *P_2*[23]*. Если же исходный треугольник ABC не является остроугольным, то таких точек не существует*[24].

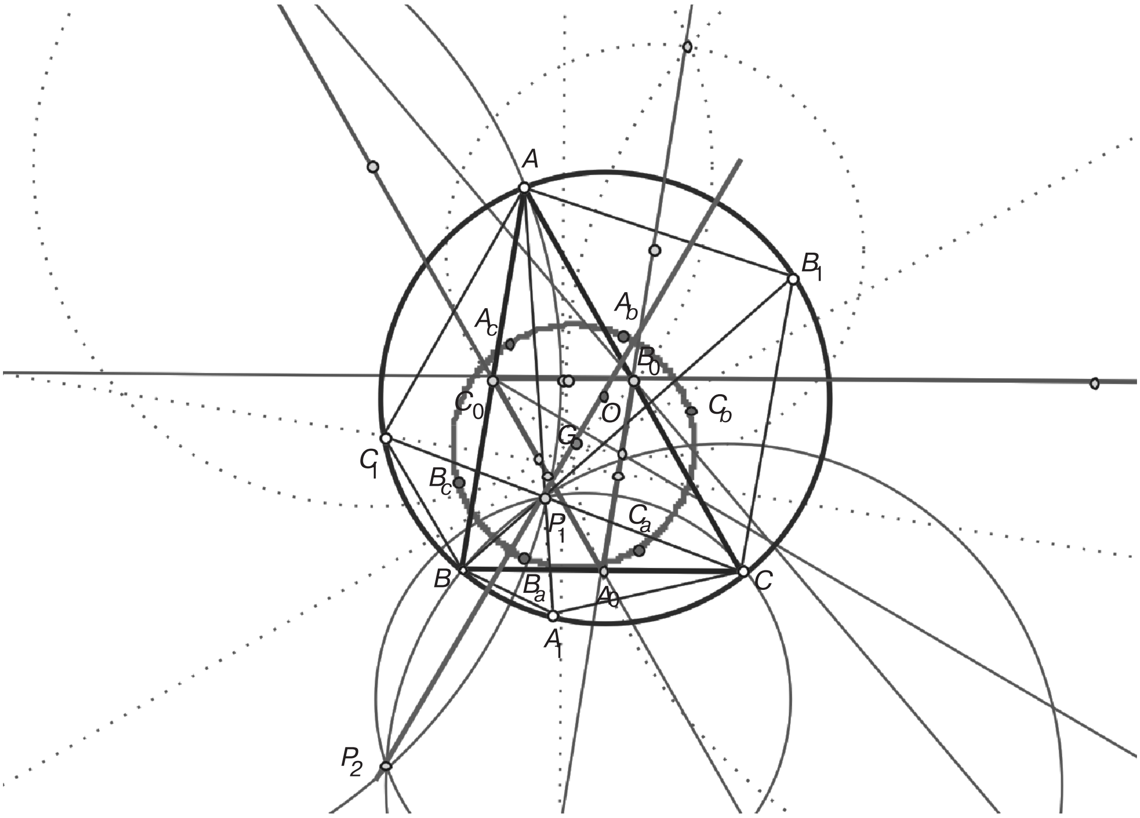


Рис. 14

Для справки.

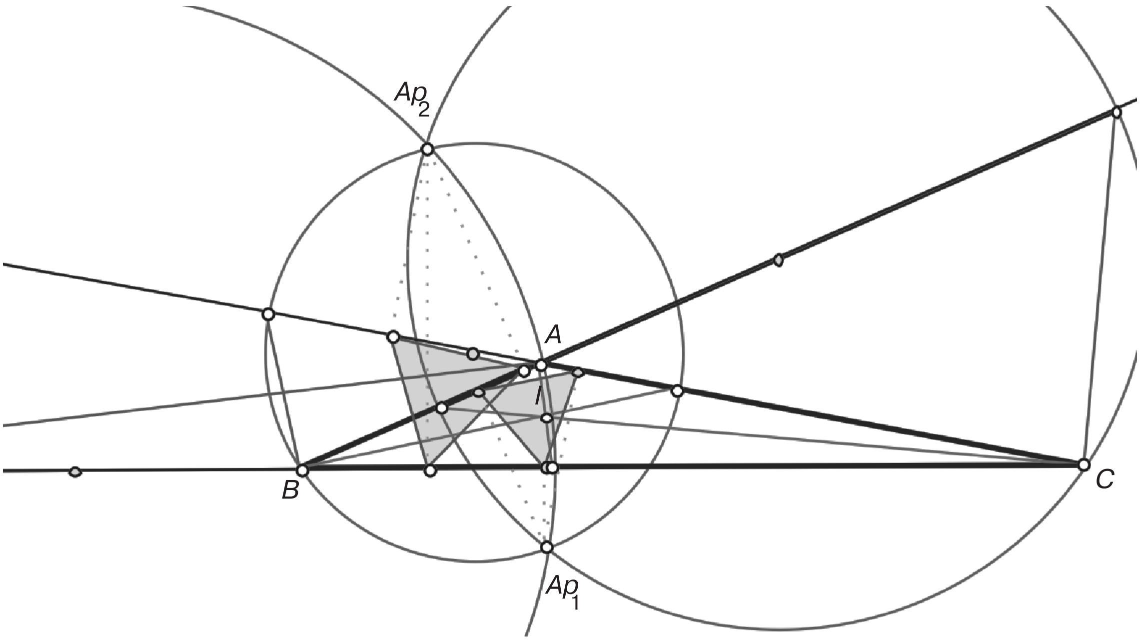


Рис. 15

Если в произвольном треугольнике ABC провести внутреннюю и внешнюю биссектрисы из вершины A, отметить точки их пересечения с прямой BC, и на отрезке с концами в этих точках построить, как на диаметре окружность — такую окружность (проходящую, кстати сказать, через вершину A) и называют *первой окружностью Аполлония* треугольника ABC.

Две другие определяются аналогично, а вся тройка окружностей пересекается в двух точках (так называемые *точки Аполлония* или *изодинамические точки* - X(15), X(16) в [5]), обладающих различными интересными свойствами, самое знаменитое из которых заключается в том, что *педальные треугольники*, порожденные этими точками — *правильные.*

Примечания

[1] Всюду в этом параграфе исходный треугольник ABC берется *полностью* разносторонним, т. е. не имеющим даже пары равных сторон (если специально не оговорено противное). Что означает наличие всех *трех* различных окружностей для рассматриваемой конструкции.

[2] Но почему-то только одно. Настолько, видать, торопился, что шарики слегка зашли за ролики, и почему-то помстилось, что корни, дающие две внешние точки, не годятся. Ну, не иначе, бес попутал.

[3] Поразила не только сама теорема, но и та молниеносная быстрота, с которой Эрманн сумел её получить. Причём, очевидно, безо всякой компьютерной подсказки. Виртуоз, что тут ещё скажешь!

[4] Признаюсь, что от всей этой *эпистолярии* с зарубежными корифеями довольно неприятный на душе осадок остался, несмотря на, в целом, позитивный итог — уж больно солидная нарисовалась *разница потенциалов*: в скорости и культуре мышления, в эрудиции и т. п., не говоря уже о моём весьма посредственном владении английским. А кому же охота выглядеть дурачком или невеждой? Правда, чего не сделаешь из любви к искусству — см. у классика: *«Как хотите, для науки я жизни не пощажу!»*. Не откажу себе в удовольствии привести *развернутую* цитату, одну из моих любимейших и значимых:

Городничий. *То же я должен вам заметить и об учителе по исторической части. Он ученая голова — это видно, и сведений нахватал тьму, но только объясняет с таким жаром, что не помнит себя. Я раз слушал его: ну, покамест говорил об ассириянах и вавилонянах — ещё ничего, а как добрался до Александра Македонского, то я не могу вам сказать, что с ним сделалось. Я думал, что пожар, ей-богу! Сбежал с кафедры и что силы есть хвать стулом об пол. Оно, конечно, Александр Македонский герой, но зачем же стулья ломать? от этого убыток казне.*

Лука Лукич. *Да, он горяч! Я ему это несколько раз уже замечал... Говорит: «Как хотите, для науки я жизни не пощажу!».*

Городничий. *Да, таков уж неизъяснимый закон судеб: умный человек — или пьяница, или рожу такую состроит, что хоть святых выноси.*

Лука Лукич. *Не приведи Бог служить по ученой части! Всего боишься: всякий мешается, всякому хочется показать, что он тоже умный человек.*

(Николай Гоголь. Ревизор).

[5] Лучше поздно, чем никогда! Хорошо хоть догадался, поскольку пользуюсь как основным, совсем другим адресом.

[6] Он же и набросал сам текст заметки, являясь, безусловно, её *четвертым* полноправным соавтором.

[7] Как в поговорке*: Без меня меня женили!*

Что-то отдаленно похожее стряслось с персонажем А. и Б. Стругацких из книжки «Понедельник начинается в субботу» (когда плохо знакомый с азами магии, начинающий чародей Саша Привалов попробовал сотворить бутерброд и чашку кофе):

Остались: блюдо, халат с кристаллами и кружка с черной жидкостью, разросшаяся до размеров кувшина. Я поднял её обеими руками и понюхал. По-моему, это были черные чернила для авторучки. Блюдо за креслом шевелилось, царапая лапами цветной линолеум, и мерзко шипело. Мне было очень неуютно.

В коридоре послышались шаги и голоса, дверь распахнулась, на пороге появился Янус Полуэктович и, как всегда, произнес: «Так». Я заметался. Янус Полуэктович прошел к себе в кабинет, на ходу небрежно, одним универсальным движением брови ликвидировав всю сотворенную мною кунсткамеру. За ним проследовали Федор Симеонович, Кристобаль Хунта с толстой черной сигаретой в углу рта, насупленный Выбегалло и решительный Роман Ойра-Ойра.

Все они были озабочены, очень спешили и не обратили на меня никакого внимания. Дверь в кабинет осталась открытой. Я с облегченным вздохом уселся на прежнее место и тут обнаружил, что меня поджидает большая фарфоровая кружка с дымящимся кофе и тарелка с бутербродами. Кто-то из титанов обо мне всё-таки позаботился, уж не знаю кто.

[8] — *oh, those Russians!*

[9] В которой мне принадлежат лишь основная конструкция и ключевое уравнение окружностей — вообщем-то, не так уж и мало. Положа руку на сердце, уверен в том, что, будучи предоставлен сам себе, без «братской» помощи — навряд ли сумел бы обнаружить и доказать факты, сформулированные в превосходных и содержательных Теоремах 1 и 2. С Теоремой же 3, наверное, бы справился — но не так уж сразу. Поскольку быстротой мышления и в лучшие годы не блистал.

[10] Многое интересное о кониках, связанных с треугольником, можно почерпнуть из книжек [1] и [7]. Эта область геометрии, выходящая за пределы школьных курсов и, как правило, не входящая в университетские, чрезвычайно щедра на великое множество неожиданных и красивых утверждений. Ну, вот взять хотя бы такое, к примеру: *Гипербола, описанная около треугольника (т. е. проходящая через его вершины), является равносторонней (т. е. асимптоты которой перпендикулярны) тогда и только тогда, когда она содержит ортоцентр H этого треугольника. При этом центр её всегда будет расположен на окружности Эйлера.*

[11] Все сопряжения берутся относительно исходного треугольника ABC.

[12] Дело в том, что любая описанная около треугольника коника есть образ некоторой прямой, содержащей изогональные образы любых двух точек коники ([1],[7]). А точки G и K изогонально сопряжены друг другу.

[13] Именно гиперболой, поскольку, являясь описанной около треугольника $A'B'C'$, она содержит его внутреннюю точку $G = G'$.

[14] *Сотоварищи,* если по нашему — и *Company,* если по ихнему. К теореме этой и следующей приложили руку, помимо Эрманна, ещё и Ю вместе с Гарсия-Капитаном (как можно было усмотреть из *йаховской* переписки, столь запоздало нашедшей одного из своих адресатов).

[15] Это если ковыряться «вручную». А так — какая-нибудь *Mathematica* 5.1 без особого, как говорится, напряга всё просчитала бы.

[16] Впрочем, начинать можно и с *параллели.* Затем пойдет *антипараллель* и т. п. На всякий случай, ещё напомним: говорят, что отрезок B_1C_1, где точки B_1 и C_1 лежат на лучах AC и AB (или, одновременно, на продолжениях этих лучей), *антипараллен* стороне BC, если $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$ и $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$.

Очевидно, что при симметрии относительно биссектрисы угла BAC антипараллельный отрезок переходит в отрезок, параллельный стороне BC. (Это — эквивалентное определение антипараллельности).

[17] Все сведенья о кубических кривых, содержащиеся в этом параграфе, заимствованы из [3].

[18] Изолированную точку (0;0) мы исключаем из рассмотрения — она ни на что не влияет.

[19] Эта процедура — ни что иное, как приведение коники к *главным осям.*

[20] *In my end is my beginning (В моём конце — моё начало).*

Томас Стирнс Элиот.

[21] Как по заказу — сразу же следом за публикацией [9].

[22] Назовём так, в честь авторов статьи: *N. Dergiades, F.J. Garcia Capitan, S.H. Lim.*

[23] Отметим, что доказательство существования окружностей проводится исключительно геометрически. В статье также приводятся барицентрические координаты этих точек и другой остроумный способ их построения.

[24] Такие дела нет-нет, а и встречаются в геометрии. Вспомним, например, хрестоматийную *задачу Фаньяно о треугольнике наименьшего периметра*, вписанного в данный (*остроугольный* — в противном случае проблема не решается; см. [2] — з.17.21) треугольник.

Литература

1. А. Акопян, А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М., МЦНМО, 2011.

2. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2007.

3. А. Савельев. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Москва-Ижевск, НИЦ: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.

4. C. Bradley. The Algebra of Geometry. Cartesian, Areal and Projective Coordinates. UK, Bath, Highperception Ltd, 2007.

5. C. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers.
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

6. R. Honsberger. Episodes in Nineteenth and Twenties Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.

7. P. Yiu. Introduction to the Geometry of the Triangle.
http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

8. Hyacinthos messages.
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

9. J.-P. Ehrmann, F.J. Garcia Capitan, A. Myakishev, Construction of Circles Trough Intercepts of Parallels to Cevians, *Forum Geom.*, 30 (2011) 261–268.
http://forumgeom.fau.edu/
http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201130index.html

10. N. Dergiades, F.J. Garcia Capitan, S.H. Lim, On Six Circumcenters and Their Concyclicity, *Forum Geom.*, 31 (2011) 269–275.
http://forumgeom.fau.edu/
http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201131index.html

Июль, 2011 — Март, 2012, Москва

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея № 1303, г. Москва.

Email: myakishev62@mail.ru

Проблемы развития мышления при работе пользователя в современных информационных системах

А. И. Федосеев

Часть 1: История процедурных информационных систем

Изучение современных информационных систем, ориентированных на потребителя, в качестве содержания образования уроков информатики не способствует развитию мышления учащихся. В первой части статьи автор подтверждает это положение анализом истории развития и становления современных "процедурных" информационных систем. Выход из этой ситуации будет предложен во второй части статьи, которая выйдет в следующем номере журнала.

Информационные технологии изменили общество. Ученики сейчас прекрасно самостоятельно осваивают новые цифровые устройства и уже с трудом представляют свою жизнь без компьютеров. Любопытно, что это слабо связано с посещением ими уроков информатики, ведь современные устройства и программы проектируются с минимальными требованиями к пользователю.

Очевидно, что прогресс и упрощение компьютеров позволяют вовлекать в информационную сферу новые профессии, отрасли, другие аспекты общественной жизни. В то же время, тотальный процедурный характер современных информационных систем, где пользователю предоставлен только узкий набор доступных процедур, а типичным способом работы является выучивание правильной последовательности действий, блокирует развитие мышления учащихся и не позволяет им использовать компьютер как действительно универсальное средство решения задач.

Проблема развития мышления учащихся при работе за компьютером может быть рассмотрена с помощью такого понятия, как формальная система. В своей известной книге «Гедель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда» Хофштадтер на математическом материале показывает, в какую ловушку может попасть человек, решающий задачу в рамках формальной системы. Ключевым условием решения в этом случае будет рефлексивный выход из системы, понимание ее ограничений и правил работы.

Если из этого фокуса взглянуть на информационные системы, то можно обнаружить основные проблемы развития мышления учащихся при работе за компьютером. В первой части статьи мы рассматриваем историю развития информационных систем и постепенное изменение типичного способа работы за компьютером — от архитектора системы к пользователю, которому доступен лишь узкий список процедур, — и то, какое влияние это оказало на потенциал развития мышления учащихся.

Введение

Современные школьники круглые сутки не расстаются со своими электронными устройствами — компьютерами, плеерами, телефонами. И это не удивительно, ведь мы живем в информационном обществе, а количество информации, производимой и потребляемой нами, год от года увеличивается. Часто приходится слышать, что школьники разбираются в современных технологиях куда лучше своих учителей и родителей (Tapscott, 1998; Prensky, 2001; Palfrey и др, 2010). В чем-то они наверняка разбираются лучше, но важно другое: работа школьников с компьютером и в интернете происходит зачастую без понимания технических, но главное — социально-гуманитарных основ работы программ и сети.

Это происходит во многом потому, что компьютер в глазах современного пользователя — это бытовой прибор, чуть более сложный аналог телевизора или стиральной машины. Такое упрощение компьютеров естественно: без этого они не стали бы так популярны. Сейчас можно найти десятки тысяч программ, предназначенных для решения огромного числа задач пользователей. Но, вместе с этим, от пользователя все меньше требуется понимание внутреннего устройства информационных систем и принципов их функционирования. Работая с системой как с чёрным ящиком, зачастую методом проб и ошибок или просто выучивая последовательность нужных шагов, пользователи все меньше задействует в своей работе мышление[1]. Так, действия пользователя ограничиваются тем функционалом, который был предоставлен ему продавцом программного продукта. Число продуктов растет, а возможности каждого из них сокращаются и специализируются. Это означает, что возможности компьютера как универсального инструмента для решения широко класса задач остаются зачастую невостребованными.

Другая проблема кроется в том, что ребенок плохо справляется с информацией, которая его окружает: в условиях переизбытка новостей, рекламы, окружающих его сообщений он перестает трезво оценивать происходящее и разбираться в сути вещей (Абельсон и др, 2009) — при том, что количество ненаучных, псевдонаучных и просто ложных сведений чрезвычайно велико. Поэтому в обществе повсеместных медиа и интернета на первое место выходит способность работать с информационными потоками и понимать причины их возникновения, отличать информацию и знание (Громыко Н.В., 2001). Показательно, что современные информационные технологии не только не помогают разрешить эту проблему, но усугубляют ее: внутреннее устройство и механизмы работы информационных систем и сообществ скрыты от пользователя, и он не воспринимает такие системы как средства манипулирования его сознанием.

Озвученные тенденции вступают в противоречие, а проблемы только усиливают друг друга, ведь потребность современных пользователей в адекватных средствах работы с нарастающим валом доступной информации не могут быть решены, пока предлагаемые информационные технологии только упрощают действия пользователя и механизируют работу с информацией.

Эти проблемы отразились и на сфере образования. Вместе с развитием информационных систем изменялся и соответствующий школьный предмет. Школьная информатика, еще с момента своего появления (Ершов, 1983), отвечала за освоение школьниками типичных способов работы с информационными системами. В настоящий момент содержанием информатики является прежде всего не программирование, а изучение конкретных информационных систем и продуктов, поэтому ни о каком последовательном развитии мышления учащихся в рамках школьного предмета речь не идет (Федосеев, 2011).

Обновление учебного содержания школьной информатики, а также сверх-популярное сейчас повсеместное встраивание информационных технологий в образовательный процесс требует серьезного отношения к указанным проблемам. Нужно пересмотреть не только принципы организации учебных предметов, но и само взаимодействие пользователя с информационными системами в ходе обучения. Проводимое нами исследование позволяет сделать первые шаги в этом направлении.

Данная работа посвящена изучению способов работы пользователя за компьютером и соответствующей организации его мышления. Рассматривая такой сложный объект, приходится учитывать несколько предметных позиций (см. рис. 1): прежде всего это *профессиональная* позиция в области информационных технологий, *культуролого-социологическая* позиция, связанная с гуманитарным аспектом современных информационных систем и информационного общества (Рунов, 2009; Комарова, 2010), и, конечно, *психологическая* и *педагогическая* позиции.

[1]Характерный пример из индустрии информационных технологий: одно из популярных в настоящее время руководств для дизайнеров информационных систем в интернете так и называется — «Не заставляйте меня думать!» (Steve Krug *Don't Make Me Think! A common sense approach to web usability*, 2006).

Методологическая позиция используется для нормировки метода нашей работы и осмысления получаемых результатов.

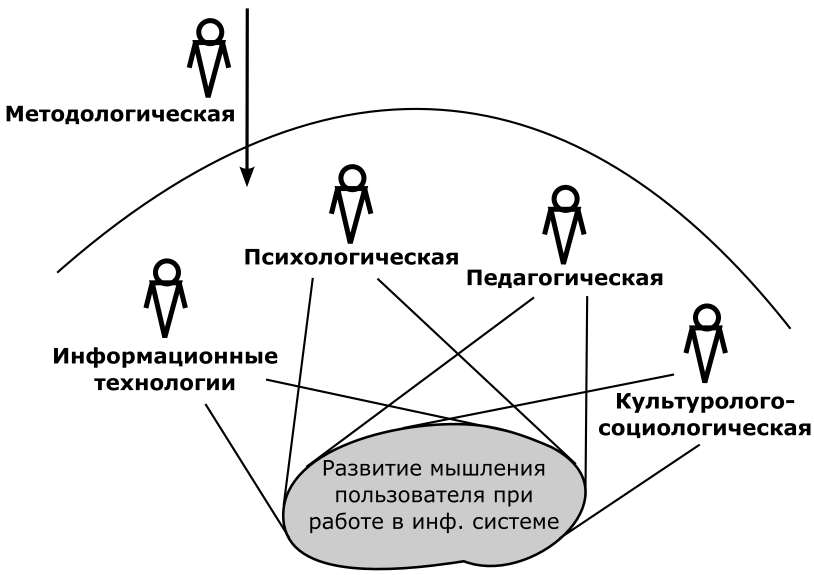


Рис. 1. Схема полипозиционного исследования

Такое сложное устройство исследования отражается и на структуре статей: в этой и следующей статье будут последовательно чередоваться разделы, ориентированные на ИТ-специалистов, психологов и педагогов. Первые два раздела данной статьи в большей степени касаются информационных технологий. В следующей статье будет дано описание проведенной диагностики, а завершит ее ряд выводов психолого-педагогического и философского характера, также будут указаны направления для возможного развития и применения данной темы в общем образовании.

1. Понятие информационной системы

Прежде чем преступить к основному изложению, необходимо также кратко остановиться на понятии *информационной системы*, которое мы используем в работе. Под термином «информационная система» обычно понимается совокупность технического, программного и организационного обеспечения, но также и персонала, предназначенная для того, чтобы обеспечивать информационные потребности пользователей (Когаловский, 2003). Говоря об информационной системе, традиционно имеют в виду не только набор специфического оборудования или программ в памяти компьютера, но и принципы организации работы пользователя.

Такое определение широко используется в сфере информационных технологий, но для целей настоящего исследования оно не подходит по двум причинам: во-первых, делая упор на технической стороне, мы можем упустить специфику человеко-машинного взаимодействия — то, как организуется мышление пользователя при работе за компьютером; во-вторых, данное определение не задает истории и перспективы развития информационных систем, что может быть очень важно, когда мы анализируем деятельность пользователя.

Поэтому для того, чтобы во всей полноте изучить влияние работы за компьютером на сознание и мышление учащихся, мы вводим понятие *информационной полисистемы*, которая состоит как минимум из трех следующих связанных между собой систем (см. рис. 2):

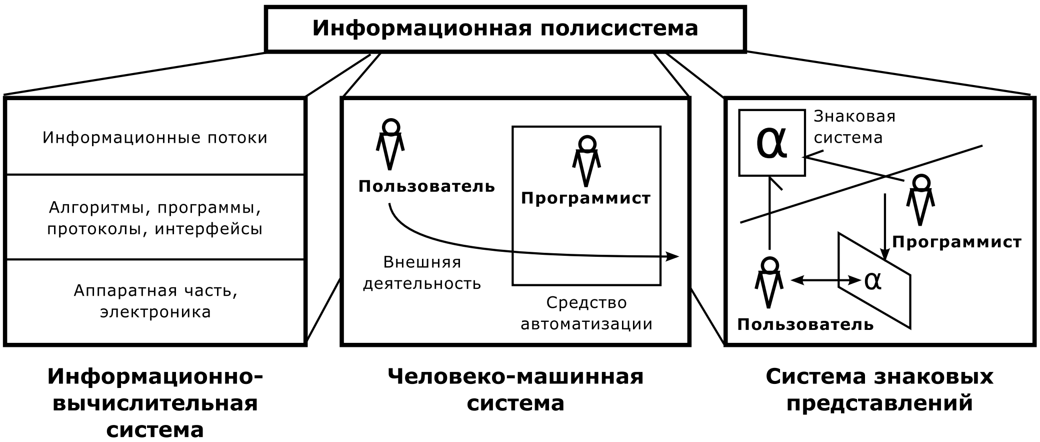


Рис. 2. Схема информационной полисистемы

- *Информационно-вычислительная система*, которая включает в себя аппаратную и программную части (от физических основ работы электронных устройств до программ, исполняемых в памяти компьютера): все блоки, алгоритмы и принципы работы вычислительного устройства, а также информационную часть, связанную с информационными потоками, возникающими в ходе работы системы. Такую систему можно даже назвать *формальной*, потому что все принципы ее работы и законы функционирования можно описать строго математически. Пользователь системы не является частью данной системы, а фигурирует лишь как источник входных данных и получатель результата.

- *Человеко-машинная система*, возникает, когда мы рассматриваем компьютер не сам по себе, а в рамках какой-то внешней деятельности, для которой вычисления или работа с информацией — всего лишь одно из используемых средств (Nardi, 1996; Kaptelinin и др, 2006). В рамках этой системы можно говорить об автоматизации и организации труда между несколькими профессиональными позициями. Перед пользователем в такой системе стоят собственные профессиональные задачи, которые он и решает с помощью компьютера.

- *Система знаковых представлений* позволяет описать процесс коммуникации, который разворачивается между пользователем и компьютерными программами, а также другими пользователями. Работая за компьютером, пользователь всегда находится в своеобразном знаковом пространстве (Жегалин, 1991; Нечипоренко, 2003). К примеру, любой современный пользователь знает, что означает курсор мыши или окно, как с ними работать; пользователи понимают, что такое адрес сайта и куда его нужно вводить. Такое знаковое пространство определяется не только внутренними особенностями вычислительных систем, но и доступными способами ввода и вывода информации, распространенными стандартами организации пользовательского интерфейса и т. п.

Три рассмотренные системы, будучи связаны между собой сложным образом, образуют *полисистему*. Согласно Г. П. Щедровицкому, в полисистеме множество систем накладываются друг на друга, а их морфологии, функции и процессы переходят из одной системы в другую (Щедровицкий, 2003). Когда мы говорим о работе человека за компьютером, можно показать эту особенность полисистем на любом историческом примере: развитие цифровых технологий, а также интерфейсов и знаковых систем шли рука об руку с изменением роли компьютера в производстве и жизни общества — и не всегда можно однозначно сказать, что было определяющим в этом развитии.

Мы вводим такое сложное устройство информационной полисистемы прежде всего для того, чтобы различить средство (инструмент) работы и влияние его на сознание и мышление пользователя. Поэтому мы будем обращаться к каждой из рассмотренных систем в отдельности, а также к информационной полисистеме в целостности. Далее, говоря об информационной системе, мы будем понимать информационную полисистему, описанную выше.

2. Историческое развитие информационных систем

Рассмотрение психолого-педагогических аспектов, связанных с работой пользователя за компьютером и развитием его мышления, требует рассмотрения истории возникновения и развития информационных систем. Мы обратимся к генезису тех теоретических понятий, которые учащийся осваивает в ходе обучения и работы за компьютером. В. В. Давыдов отмечал, что «... за каждым понятием скрыто особое действие (или система таких действий), без выявления которого нельзя раскрыть механизмы возникновения и функционирования данного понятия» (Давыдов, 1996). Таким образом, рассматривая развитие мышления и присвоение учениками определенных мыслительный действий, необходимо прежде всего рассмотреть генезис соответствующих понятий, в том числе и историческое их появление.

Распространенные сейчас способы работы за компьютером, современное состояние отрасли информационных технологий или даже школьный предмет «Информатика» стали итогом не очень долгого, но интересного пути. Нам повезло, потому что на этом примере мы можем увидеть в сжатом виде — за каких-то пятьдесят лет — те исторические процессы, которые характерны для многих научных предметов или областей человеческой деятельности. Мы рассмотрим только несколько ключевых, по нашему мнению, точек в развитии информационных систем и попробуем показать, как в них изменялись принципы работы за компьютером.

История наук подтверждает, что со временем в любой науке возникает своя система знаний и понятий, свой язык, а также набор специальных средств, обучающих задач, которые используются для введения новых людей в предмет этой науки. Постепенно система знаний усложняется, появляется множество специализаций, профессия становится более узкой, но при этом профессионал зачастую теряет рефлексивную позицию по отношению к изучаемому предмету (Степин, 2000). Г. П. Щедровицкий рассматривал эту проблему в контексте развития «человеко-машинных систем» (Щедровицкий, 1969), критикуя традиционный подход к проектированию таких систем, в которых человек рассматривался лишь как пассивный элемент в потоках информации и управления.

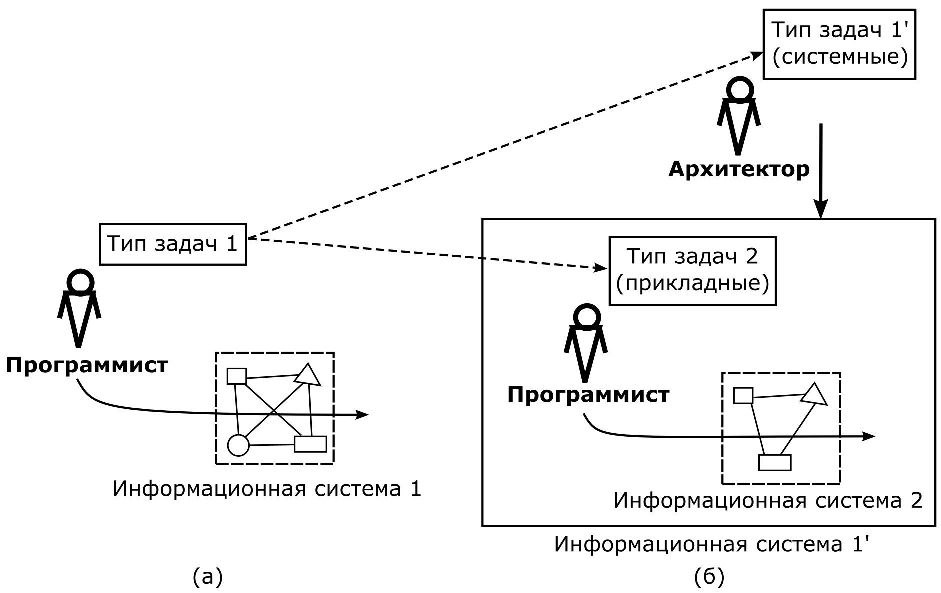


Рис. 3. Схема этапа развития информационных систем — профессионал становится частью системы

Если говорить о развитии информационных технологий и информатики как науки, можно выделить следующие этапы. На первом этапе развития компьютеров (рис. 3а) программист имел дело с открытой системой. Это выражалось в том, что, во-первых, программист понимал, как устроена система на разных уровнях, а во-вторых, нормой его работы была модификация, доработка системы для решения поставленной (как правило, вычислительной) задачи.

Информационно-вычислительные системы усложнялись, одновременно расширялся и круг решаемых с помощью компьютера задач. Профессия программиста специализировалась, а решаемые задачи разделились на системные и прикладные (рис. 3б). Прикладному программисту теперь предлагалась система более высокого уровня (язык программирования и набор готовых программ), тогда как большая часть аспектов устройства информационной системы была от него скрыта — и не нужна в повседневной работе. Но вместе с этим программист потерял возможность охватить всю информационную систему целиком, начал работать в рамках заданной для него формальной системы. Действия программиста стали все больше ограничиваться рамками предоставленных ему инструментов. Так профессионал стал частью системы, созданной без его участия.

Конечно, этот процесс — неизбежный и характерный для развития любой сферы деятельности. Со временем внутри профессионализма программиста появилась целая иерархия профессиональных позиций: появились и такие программисты, которые работают уже только со своим узким формальным слоем и не понимают, что происходит в других компонентах информационной системы (рис. 4). Было бы интересно отдельно рассмотреть, как исторически менялась и специализировалась деятельность программиста, но, к сожалению, это выходит за рамки данной работы.

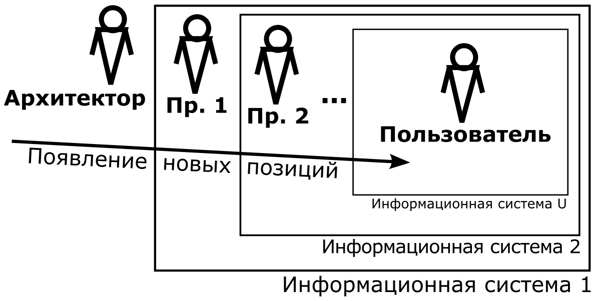


Рис. 4. Схема появления иерархии профессиональных позиций

С распространением персональных компьютеров выделилась и позиция пользователя, которому предоставлялась полностью готовая к использованию система — с потребительскими качествами, низким требованием к знаниям пользователя об устройстве системы, но при этом с жестко заданным набором возможных действий. Фактически, еще только начиная знакомиться с компьютером, пользователь уже начинал работать в заданной извне системе. Ну а расширение базовой функциональности требовало от пользователя выбора другой системы или же переход к позиции программиста более низкого уровня.

С точки зрения развития сферы информационных технологий и их места в современном мире описанный процесс — явление положительное. Пользователь, освобожденный от необходимости досконально изучать систему, смог уделить внимание решению собственных задач. Вместе с радикальным увеличением числа областей, в которых применяются компьютеры, потребовалось и снижение порога вхождения. Стимулируемые коммерческими интересами и приоритетами государственного развития, широко распространились персональные компьютеры, а вслед за ними и мобильные устройства, ориентированные на пользователей-потребителей. Отдельную роль в специализации программистов сыграло и то, что подготовка профессионалов невысокого класса — только для некоторых заданных формальных систем — требует намного меньше времени и ресурсов.

Одновременно можно заметить и то, что вместе с упрощением интерфейса и уменьшением требований, накладываемых на знания пользователя о системе, пользователь перестал контролировать систему, а стал скорее подчиняться ее правилам. Вслед за этим последовал ряд психологических эффектов, некоторые из которых рассматриваются далее.

3. Особенности работы пользователя в процедурной системе

Современную информационную систему (будь то персональный компьютер или мобильный телефон) для конечного потребителя можно охарактеризовать как систему *процедурную* (Курячий, 2007). Это касается самого принципа работы пользователя (см. рис. 5). Если для программиста компьютер или набор программ были всего лишь набором инструментов, из которых он конструировал то, что нужно для решения конкретной задачи, то в процедурной системе пользователь может решать только те задачи, которые покрываются выбором из списка предлагаемых процедур — возможных действий в системе. Работа в такой системе состоит в следовании инструкциям: система сложна, ее поведение непредсказуемо — ведь ее устройство не понятно, — и, если по незнанию нажать какую-нибудь не ту кнопку, результат может оказаться плачевным.

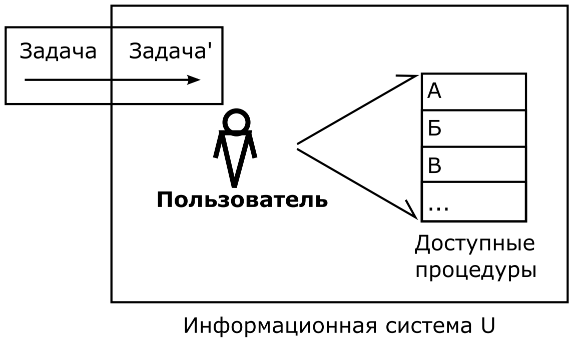


Рис. 5. Схема особенности работы пользователя в процедурной системе

Интересный эффект состоит в том, что заданный список процедур зачастую определяет не только способ решения задачи, но и сильно влияет на саму постановку задач пользователем — внешняя задача «ужимается» до возможностей системы (рис. 5). Например, работая в популярном текстовом редакторе Microsoft Word, пользователь редактирует документ на уровне его внешнего представления, как будто он создается на бумаге. При этом, как правило, упускается множество уникальных особенностей электронных документов: разделение самой информации и формы ее представления, автоматическое наименование разделов и библиографии, создание перекрестных ссылок внутри документа, работа с ключевыми словами и т. п.

Важной особенностью дизайна процедурных систем является максимальное упрощение интерфейса, а также характерное изменение знаковых систем. В них стали появляться знаки, которые должны были напоминать пользователю какие-то объекты реального мира, а свое действие с этими знаками («виртуальными объектами») пользователь мог выстраивать исходя не из имеющихся знаний о системе, а из соответствующих овеществленных представлений об этом объекте: вот поверхность для работы, на ней лежат папки, в них хранятся листочки — пользователь видит в этих действиях с информацией привычные для себя операции с реальными документами. Нет ничего удивительного в том, что в современных компьютерах вместо древовидной файловой структуры данных мы видим корзинки, папки, ярлыки, которые уже в ближайшем будущем вообще будут заменены виртуальными книгами в виртуальной библиотеке. Отдельную роль в укоренении таких информационных систем играют популярные компьютерные игры и виртуальные среды.

Само по себе появление таких знаковых систем, содержащих виртуальные, овеществленные информационные объекты, является нормальным при развитии и усложнении информационных систем. Но если работа пользователя строится исключительно на основе натурализованных представлений о функционировании этих объектов, можно наблюдать ряд негативных последствий.

Интересным следствием такого натурализованного представления о системе является мнимая уверенность пользователя в своих действиях. Пока пользователь остается в рамках известных ему процедур, он как будто понимает устройство системы, ему все очевидно. Но стоит совершить хоть какое-то отклонение от предписания, как система начинает реагировать непредсказуемым для пользователя образом. Типичный пример, с которым сталкивалось большинство далеко не только начинающих пользователей операционной системы Microsoft Windows, — это попытка перетащить программу или файл на съемный диск, а вместо этого на диске оказывался ярлык. Другой пример — использование кнопки «Назад» в браузере далеко не на всех сайтах дает ожидаемый эффект.

Но если мы встанем на позицию психолога, мы можем отметить куда более серьезные недостатки процедурных систем. В первую очередь это отказ пользователя от ответственности за свои действия — плохо работать может все что угодно: неисправное оборудование, программы с ошибками или неумелые программисты. Массовый переход к процедурным системам связан с коммерциализацией и превращением пользователя в потребителя. Потребитель получает готовый продукт и не готов разбираться с проблемами, вызванными в том числе его собственными некорректными действиями. По той же логике потребителя, от которого не требуется глубоких знаний, строится и отношение пользователей к информации в интернете и других новых медиа. Поэтому нет ничего удивительно в том, что и в современных коммуникационных средах — интернет-конференциях и социальных сетях — пользователи зачастую принимают прочитанную информацию за чистую монету.

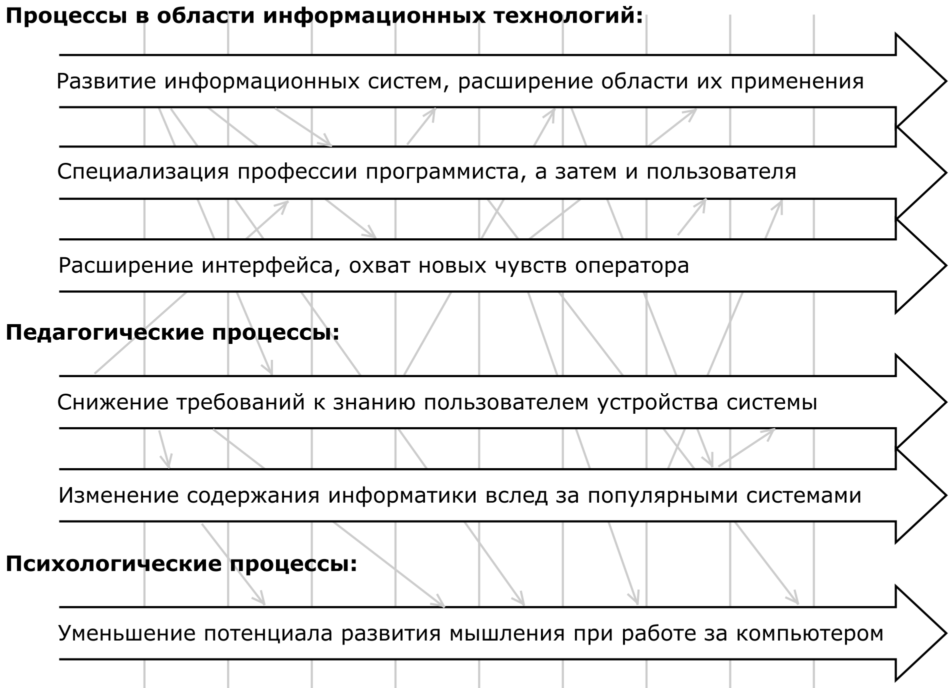


Рис. 6. Схема процессов, затрагиваемых в ходе исследования

Другой серьезный недостаток таких систем — ограничение развития мышления пользователя. Работая с готовыми процедурами, шаблонами и мастерами («wizards») пользователи не выходят на понимание ограничения системы, на деятельность моделирования или конструирования, которые характерны для инструментального использования систем программистами. Еще М. Вейтгеймер отмечал, насколько привычка действовать только последовательно, шаг за шагом, согласно выученному шаблону, препятствует развитию мышления (Вейтгеймер, 1987). Ну а если всю работу пользователей свести к повторению привычных для реальной жизни действий внутри компьютера (это может произойти с появлением полноценной виртуальной реальности), информационные системы потеряют свой потенциал уникальной знаковой системы.

Можно отметить недостатки таких систем и с педагогической точки зрения. Содержание школьной информатики изменилось вместе с широким распространением персональных компьютеров и, соответственно, процедурных систем. В процедурных системах для решения пользовательских задач нет необходимости обращаться к программированию, поэтому на первый план в учебной программе вышло изучение популярных программ — какие процедуры они предоставляют, как использовать их наиболее эффективно. Стоит ли говорить о том, что такое выучивание фактов и конкретных приемов работы имеет мало общего с развитием мышления учащегося.

Подводя итоги проведенному анализу, можно выделить основные процессы, которые затрагиваются в рамках данного исследования (см. рис. 6). Часть этих процессов описывают развитие технологий, часть — изменение способов работы пользователя. Важно, что все эти процессы развивались параллельно, оказывая сложное взаимное влияние: каждый из этих процессов в определенный момент инициировал или активизировал другие, в других случаях, — наоборот, тормозил.

Целью нашего исследования является пересмотр существующей практики применения информационных систем в школе, в том числе на уроках информатики. Исследование направлено на выявление принципиальных ограничений для развития мышления учащихся в широко распространенных сейчас процедурных системах и соответствующем способе работы пользователя.

Во второй части статьи мы рассмотрим способы преодоления этой ситуации — через рефлексивный выход из системы к развитию мышления учащихся.

Литература

[1] Абельсон Х., Ледин К., Льюис Г. *Атака битов: твоя жизнь, свобода и благополучие в цифровую эпоху.* — СПб.: Символ-Плюс, 2009

[2] Вейтгеймер М. *Продуктивное мышление.* — М.: Прогресс. — 1987

[3] Громыко Н.В. *Интернет и постмодернизм — их значение для современного образования* // Громыко Н.В. Метапредмет «Знание»: Учебное пособие для учащихся старших классов. — М.: Пушкинский институт, 2001

[4] Давыдов В.В. *Теория развивающего обучения.* — М.: Интор. — 1996

[5] Ершов А.П. *Программирование — вторая грамотность* // Журнал «Квант». — М.: Наука, 1983. — № 2

[6] Жегалин В.А. *К проблеме машинизации учебной деятельности* // Журнал «Вопросы методологии». — 1991. — № 3

[7] Когаловский М.Р. *Перспективные технологии информационных систем* — М.: ДМК Пресс; М: Компания АйТи, 2003

[8] Комарова Н.И. *Введение в социологию ИКТ* // Социология ИКТ: сборник научных статей. — Вып. I. — М.: МПГУ, 2010

[9] Курячий Г.В. *Операционная система UNIX*: Курс лекций. Учебное пособие. — М.: ИНТУ-ИТ.РУ, 2004

[10] Нечипоренко А.В. *На рубеже знаниевых технологий* // Журнал «КЕНТАВР» № 32. — 2003

[11] Рунов А.В. *Социальная информатика:* учебное пособие. — М.: КНОРУС, 2009

[12] Степин В.С. *Теоретическое знание.* — М.: Прогресс-Традиция, 2000

[13] Федосеев А.И. *Мыследеятельностный подход к освоению информационно-коммуникативных сред учащимися общеобразовательных учреждений* // Тезисы международной конференции «Проблемы и стратегические ориентиры развития образования». — М.: НИИ ИСРОО, 2011

[14] Хофштадтер, Д. *Гедель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда* — Самара: Бахрах-М, 2001

[15] Щедровицкий Г.П. *Проблема объекта в системном проектировании* // Вторая Всесоюзная конференция по технической кибернетике. Тезисы докладов. — М., 1969

[16] Щедровицкий Г.П. *Организация, руководство, управление* (в 2 томах). — М.: Наука, 2003

[17] Bonnie A. Nardi *Activity Theory and Human-Computer Interaction* // Context and consciousness: activity theory and human-computer interaction, 1996

[18] Victor Kaptelinin, Bonnie A. Nardi *Acting with technology: activity theory and interaction design*, 2006

[19] John Palfrey, Urs Gasser Born Digital: Understanding the First Generation of Digital Natives, 2010

[20] Marc Prensky *Digital Natives, Digital Immigrants Part 1*, On the Horizon, Vol. 9 Iss: 5, 2001

[21] Don Tapscott *Growing Up Digital: The Rise of the Net Generation*, 1998

Федосеев Алексей Игоревич,
научный сотрудник НИИ Инновационных
стратегий развития общего образования,
сотрудник Центра интерактивных образовательных
технологий МГУ им. М. В. Ломоносова.

Email: aleksey@fedossev.net

Содержание журнала "Математическое образование" за 2011-2012 гг.

№ 3-4 (59-60), июль – декабрь 2011 г.

№ 1 (61), январь – март 2012 г.

№ 4 (64), октябрь – декабрь 2012 г.

О деятельности ФМОП в 2012 г.

В 2012 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся гуманитарных классов ГОУ СОШ 179 и 1314 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов.
- Выпуск журнала "Математическое образование", учредителем которого ФМОП является; в 2012 г. подготовлены номера 1(61), 2(62), 3(63), 4(64).
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников ряда математических соревнований, в частности, олимпиады САММАТ, г. Самара.
- Приобретение учебных пособий, в частности, материалов для подготовки к ЕГЭ для учащихся 11 классов нескольких школ г. Москвы.
- Участие в формировании пакета раздаточных материалов для делегатов IV Межрегиональной конференции с международным участием "Возможности мыследеятельностной педагогики в реализации ФГОС нового поколения" 17-18 мая 2012 года, Москва.
- Организационная, в том числе транспортная поддержка IV Межрегиональной конференции с международным участием "Возможности мыследеятельностной педагогики в реализации ФГОС нового поколения" 17-18 мая 2012 года, Москва.
- Организация бесплатной подписки на журнал "Математическое образование" ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.
- Организация Первой конференции по алгебраической геометрии, теории элементарных частиц и теории струн "Связь теории струн с калибровочными теориями и проблемы модулей бран", 10-14 сентября 2012 г.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”.

Журнал в электронном виде размещается формате PDF в архиве по указанной ссылке.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2012 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2012 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >