

Опыт математического моделирования страхования урожая

Саблин А.И.

Московский Государственный Университет Природообустройства, Москва, Россия

В 2001 году доцент кафедры статистики Московской Сельскохозяйственной Академии им. Тимирязева А.Е. Шибалкин предложил автору проанализировать математическими методами задачу страхования урожая сельскохозяйственного предприятия (колхоза, совхоза, фермерского хозяйства и т.п.).

А именно, предлагалось организовать страхование таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

1. величина полученного урожая, выраженная в денежной форме, вместе со страховой выплатой должна быть не меньше заданной величины с как можно большей вероятностью;
2. величина страхового взноса должна быть как можно меньше.

При этом предлагалось принять как общепринятый факт нормального распределения величины урожая.

Пусть X - урожай полученный предприятием. Для удобства расчетов можно считать, что X выражено в денежной форме. Если закупочные цены не подвержены значительным колебаниям, то X можно считать нормально распределенной случайной величиной. Пусть m_0 - математическое ожидание (среднее значение) X , а σ - среднее квадратическое отклонение X . Обозначим $S(X)$ величину страховой выплаты. Пусть m - величина, упомянутая в первом условии. Её смысл – сумма годового дохода, достаточная для проведения полного комплекса сельскохозяйственных работ. Тогда должно выполняться условие

$$X + S(X) \geq m \quad (1)$$

означающее, что недостаток урожая компенсируется страховой выплатой. С другой стороны, у нас не требуется выполнения этого условия со стопроцентной вероятностью. Пусть оно выполняется с некоторой вероятностью p_k достаточно близкой к единице. Мы будем называть её *надежностью* страхования. Определим число m_k из равенства

$$p_k = P(X > m_k) = 0,5 - \Phi\left(\frac{m_k - m_0}{\sigma}\right) \quad (2)$$

Здесь Φ - функция Лапласа, т.е.

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt; \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3)$$

Таким образом условие (1) должно выполняться при $X > m_k$. Кроме того, условие минимальности страхового взноса требует, чтобы и страховая выплата была минимальной допустимой условием (1), так как среднее значение страховой выплаты определяет страховой взнос. Следовательно для страховой выплаты имеем

$$S(X) = \begin{cases} 0 & , \text{если } X \leq m_k \\ m - X & , \text{если } m_k < X \leq m \\ 0 & , \text{если } m < X \end{cases} \quad (4)$$

При снижении урожайности ниже m_k страховая выплата не выплачивается. Вероятность такого события мала и в этом случае предполагаются особые меры. Это может быть, например, плановое банкротство или централизованная государственная поддержка. Найденное нами выражение для страховой выплаты (4) позволяет посчитать её среднее значение:

$$M(S(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(x) e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{m_k}^m (m-x) e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= (m-m_0) \left(\Phi\left(\frac{m-m_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m_k-m_0}{\sigma}\right) \right) + \sigma \left(\varphi\left(\frac{m-m_0}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{m_k-m_0}{\sigma}\right) \right) \quad (5)$$

Величина ежегодного страхового взноса должна несколько превышать найденное среднее значение страховой выплаты, чтобы компенсировать расходы страховой компании. Для того, чтобы автоматизировать расчеты по приведенной формуле автор разработал следующую программу на языке C.

```

/* Таблица страховых взносов strach.c */
#include <stdio.h>
#include <io.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <memory.h>
#include <ctype.h>
#include <math.h>

#define MAXDATA 20
double data[MAXDATA] ;

int MyRead(const char *file)
/* Читает числа в начале каждой строки игнорируя все остальное
Возвращает количество прочитанных чисел */
{ char tmp[129] ;
  int n=0 ;
  FILE *inp ;
  inp=fopen(file,"r");
  while( (fgets(tmp,128,inp) != NULL)&&(n < MAXDATA - 1 ) )
    if( sscanf(tmp, "%lf", &data[n] ) == 1 ) n++ ;
  fclose(inp);
  return n ;
}

double Laplas(double x , double err)
/* ряд для функции Лапласа */
{ double rez, an=1 ;
  int sign=1,n=0 ;
  if(err <= 0 ) { printf("Laplas:Ошибка 1!\n") ; return 0;}
  rez=0; n=0; an=fabs(x) ; sign=1 ;
  while ( an > err ) {
    rez=rez+sign*an; sign=-sign ;
    an=an*x*x*(2*n+1)/( 2*(2*n+3)*(n+1) ); n=n+1 ;
  }
  if( x > 0 ) rez = rez/sqrt(2*3.14) ; else rez = - rez/sqrt(2*3.14) ;
  return rez ;
}

```

```

void main( )
{ FILE *inp;
  double m0,sigma,mk,k ;
  double m , dm ;
  double a,b ,c,d,e,f,y;
  int i ;
  MyRead("strach.inp");
  inp=fopen("strach.inp","w");
  m0=data[0] ; sigma=data[1] ; mk=data[2] ;
  k = data[3] ; dm = data[4] ;
  fprintf(inp,"Входные данные: \n" );
  fprintf(inp,"%6.2lf - средняя урожайность \n",m0 );
  fprintf(inp,"%6.2lf - ср. кв. отклонение \n",sigma );
  fprintf(inp,"%6.2lf - критическая урожайность \n",mk );
  fprintf(inp,"%5.1lf - процент страх. компании \n",k );
  fprintf(inp,"%5.1lf - шаг расчета \n",dm );
  fprintf(inp,"Результаты расчета: \n" );
  // fprintf(inp,"%6.2lf - проверка \n",exp(-0*0/2)/sqrt(2*3.14) );
  a = (mk-m0)/sigma ; b = Laplas( a,0.00001) ;
  c = exp(-a*a/2)/sqrt(2*3.14);
  fprintf(inp,"%6.2lf - надежность \n",0.5 - b );
  fprintf(inp,"          Таблица взносов          \n");
  fprintf(inp,"Приемл. урожай.    Взнос    Процент взноса    Эфф. урожай. \n" );
  c = exp(-a*a/2)/sqrt(2*3.14);
  for(m=mk; m < m0+2*sigma ; m=m+dm){
    d = (m-m0)/sigma ; e=Laplas( d,0.00001) ;
    f = exp(-d*d/2)/sqrt(2*3.14) ;
    y=((m-m0)*(e-b)+sigma*(f-c))*(1+k/100) ;
    fprintf(inp," %8.4lf %10.4lf %8.4lf %8.4lf \n",m,y,100*y/m,m-y );
  }
}

```

Эта программа была отлажена в системе программирования Microsoft QuickC 2.01 под операционной системой MS DOS. Как нетрудно понять из текста программы она читает данные из файла strach.inp и записывает результаты в этот же файл. Приведем пример файла strach.inp :

Входные данные:

```

30.00 - средняя урожайность
10.00 - ср. кв. отклонение
13.00 - критическая урожайность
20.0  - процент страх. компании
1.0   - шаг расчета

```

Результаты расчета:

```

0.96 - надежность

```

Таблица взносов

Приемл. урожай.	Взнос	Процент взноса	Эфф. урожай.
13.0000	0.0000	0.0000	13.0000
14.0000	0.0059	0.0424	13.9941
15.0000	0.0252	0.1680	14.9748
16.0000	0.0601	0.3756	15.9399
17.0000	0.1130	0.6646	16.8870
18.0000	0.1864	1.0356	17.8136
19.0000	0.2831	1.4901	18.7169
20.0000	0.4060	2.0302	19.5940
21.0000	0.5580	2.6573	20.4420
22.0000	0.7419	3.3723	21.2581

23.0000	0.9605	4.1763	22.0395
24.0000	1.2166	5.0693	22.7834
25.0000	1.5127	6.0509	23.4873
26.0000	1.8511	7.1195	24.1489
27.0000	2.2335	8.2724	24.7665
28.0000	2.6618	9.5063	25.3382
29.0000	3.1369	10.8169	25.8631
30.0000	3.6596	12.1988	26.3404

В этом файле взяты модельные данные. Критической урожайностью называется число m_k , а приемлемой урожайностью число m из формулы (5). Для удобства анализа введены параметры связанные с эффективностью страхования, но полностью работы по анализу и осмыслению приведенной модели могут быть проведены только со специалистами по сельскому хозяйству и страхованию.