Лекция от 24.09.2014

# Замена переменной в двойном интеграле.

<u>Пример</u> Найти двойной интеграл $\iint\limits_S f(x;y)dxdy$, где $S$ - круг удовлетворяет неравенству $x^2+y^2\le 1$

<u>Решение</u> $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x;y)dy$

При $x_0\in[-1;1]$, прямая $x=x_0$ пересекает $x^2+y^2=1$ в точках $(x_0;-\sqrt{1-x_0^2})$ и $(x_0;\sqrt{1-x_0^2})$

$x^2+y^2=1$; $x_0^2+y^2=1$; $y^2=1-x_0^2$

Даже при $f(x;y)=1$ получаем

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=\int\limits_{-1}^{1}y\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\limits_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}dx$$

Получаем очень сложный интеграл. Можно ли его как-то упростить? Да, с помощью замены переменной.

<u>Теорема 1</u> (общая формула замены переменной)

Если формулы $x=\varphi(u;v)$ $y=\psi(u;v)$ отображают область $G_{uv}$ на область $G_{xy}$, то

$$\iint\limits_{G_{xy}}f(x;y)dxdy=\iint\limits_{G_{uv}}f(\varphi(u;v);\psi(u;v))J\,dudv,$$ где

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

<u>Теорема 2</u> (переход к полярным координатам в двойном интеграле)

Если $x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$ тогда

$$\iint\limits_{G_{xy}}f(x;y)dxdy=\iint\limits_{G_{\rho\varphi}}f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi$$

Доказательство:

$\frac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\varphi$; $\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\rho(-\sin\varphi)$

$\frac{\partial y}{\partial\rho}=\sin\varphi$; $\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi$

② $J=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi-(-\rho\sin^2\varphi)=\rho$ и т.д.

Пример 2 (продолжение примера 1)

Если $G_{xy}=S$ - круг радиуса 1, то $G_{\rho\varphi}$ это прямоугольник $\{0\le\rho\le 1;\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$

Поэтому $\iint_S f(x;y)dxdy=\iint_{G_{\rho\varphi}} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi=$

$=\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\varphi$

В частности если $f(x;y)=1$, то,

$I=\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}\rho d\varphi=\int_0^1 \rho\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}d\rho=\int_0^1\rho(2\pi-0)d\rho=$

$=2\pi\cdot\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1=\pi$ (т.е. площадь круга радиуса 1 равна $\pi$)

Пример (Шипачёв стр 202 №29)

Вычислить $\iint_G e^{x^2+y^2}dxdy$, где $G$ круг радиуса $R$ с центром в начале координат

Решение: Если перейти к полярным координатам, то $e^{x^2+y^2}=e^{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}=e^{\rho^2}$ и $0\le\varphi\le\pi$,

$0\le\rho\le R$, поэтому

$I=\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}e^{\rho^2}\rho d\varphi=\int_0^R e^{\rho^2}\rho\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}d\rho=2\pi\int_0^R e^{\rho^2}d\left(\frac{\rho^2}{2}\right)=$

$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\rho^2}\Big|_0^R=\pi(e^{\rho^2}-1)$

Ответ: $\pi(e^{\rho^2}-1)$

Приложение кратных интегралов

1. Вычисление площадей и объёмов:

площадь $(S)=\iint_S dxdy$

объём $(V)=\iiint_V dxdydz$

(3) 2. Масса (заряд и т.п.) тела переменной плотности

масса $(V) = \iiint\limits_V \rho(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

$\rho(x;y;z)$ – плотность

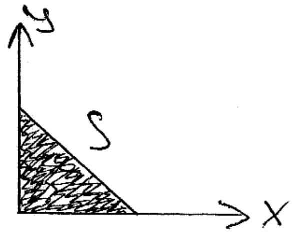
3. Момент вращения $M_l = \iiint\limits_V \rho(x;y;z)\,r^2\,dx\,dy\,dz$

$r$ – расстояние от точки $(x;y;z)$ до прямой $l$

В частности для оси $X$

$$M_{Ox} = \iiint\limits_V \rho(x;y;z)\sqrt{y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

Пример Найти момент вращения однородной плоской треугольной пластины массы $M$ относительно оси $Ox$, если она ограничена прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=1$




Решение: Мы имеем тело плотности $M / \frac{1}{2} = 2M$ распределённой по плоской фигуре, поэтому тройной интеграл превращается в двойной

$$M_{Ox} = \iint\limits_S 2M\sqrt{y^2+0^2}\,dx\,dy = 2M\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2\,dy =$$

$$= 2M\int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x} dx = \frac{2M}{3}\int_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{2M}{3}\,\frac{(1-x)^4}{4}(-1)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2M}{12}(0-1) = \frac{M}{6}$$

Ответ: $M/6$

Пример (Шипачёв стр 214 №152(4б))

$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, где $x=0;\ x=1;\ y=0;\ y=1;\ z=0;\ z=1$

Решение: $I = \iint\limits_S dx\,dy\int_0^1 (x+y+z)\,dz = \iint\limits_S \left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx\,dy =$

$$= \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Ответ: 1,5