

Статистический смысл вероятности

Теория вероятностей это раздел математики предназначенный для изучения так называемых случайных явлений. Под **случайными явлениями** мы понимаем такие явления природы или научные эксперименты, результат которых мы не можем предсказать принципиально. В чистом виде таких явлений в природе нет, но есть много явлений, где методы теории вероятностей работают достаточно хорошо.

Приведем примеры:

1. Подбрасывание монеты или игральной кости.
2. Количество осадков за летний сезон.
3. Выигрыш в лотерею.
4. Число голосов отданных за кандидата на выборах.
5. Курс доллара через неделю.

При бросании монеты мы не знаем, что выпадет - орел или решка. Однако мы уверены, что решка выпадает также часто, как и орел. В теории вероятностей мы говорим, что вероятность выпадения орла равна вероятности выпадения решки и равна 0,5. Этот факт можно обосновать логически и проверить экспериментально. Предположим, что мы провели эксперимент по многократному подбрасыванию монеты несколько раз и в результате получили следующую таблицу:

Число подбрасываний	10	50	500	10000
Число выпадений решки	3	29	241	5023
Относительная частота выпадения решки	0,3	0,58	0,482	0,5023
Отклонение от 0,5	0,2	0,08	0,018	0,0023

Мы видим, что чем больше число повторений, тем меньше относительная частота отклоняется от 0,5. Это и означает, что вероятность выпадения решки равна 0,5. Заметим, что экспериментальный способ отыскания вероятности принципиально не точен. Вопрос о числе повторений эксперимента необходимом для определения неизвестной вероятности с заданной точностью решается математической статистикой, которая использует методы развиваемые в теории вероятностей.

Упражнение.

1. Летом 2004 года в Москве было 72 солнечных дня, а летом 2005 года 75 солнечных дней. Какова относительная частота солнечных дней в 2004 году? В 2005 году? Какова вероятность, что 10 июня 2020 года в Москве будет солнечным ?

Ответ: 0,783;0,815;0,80.

Классический способ подсчёта вероятности

Логическое обоснование того, что вероятность выпадения решки равна 0,5 состоит в следующем. При подбрасывании монеты возможны два исхода: выпадение решки и выпадение орла. В силу симметричности монеты, нет никаких оснований считать, что решка будет выпадать чаще, чем орел или наоборот. Следовательно решка будет выпадать примерно в половине случаев, что и означает, что вероятность её выпадения равна 0,5. Мы, конечно, предполагаем, что монета на ребро не становится.

Подобный метод рассуждений применяется часто и называется классическим способом вычисления вероятности. Он может быть выражен следующей формулой:

$$< \text{вероятность} > = \frac{< \text{число благоприятных исходов} >}{< \text{общее число равновероятных исходов} >}$$

Примеры.

1. Игральную кость бросили один раз. Найти вероятность

- а) выпадения тройки;
- б) выпадения пятерки;
- в) выпадения четного числа очков;
- г) выпадения больше четырех очков.

Решение: Запишем решение в случае в), а в остальных укажем ответы. Общее число равновероятных исходов равно 6 по числу граней игральной кости. Благоприятные исходы: выпадение 2, 4 или 6. Поэтому вероятность равна $3/6=1/2$.

Ответ: а) $1/6$ б) $1/6$ в) $1/2$ г) $1/3$.

2. В ящике лежат два белых шара, два черных шара и один красный шар. Случайным образом выбирали один шар. Какова вероятность, что он

- а) белый;
 - б) не черный?
- Выбрали два шара. Какова вероятность того, что
- в) оба шара белые;
 - г) один из шаров красный;
 - д) шары разного цвета;
 - е) первый белый, а второй чёрный?

Решение: Слова “случайным образом” означают, что каждый шар может быть выбран с равной вероятностью. Поэтому решение в пунктах а) и б) очевидно.

Для решения следующих пунктов пронумеруем шары: 1,2 — белые, 3,4 — черные, 5 — красный, и выпишем все возможные пары шаров:

(1;2), (1;3), (1;4), (1;5); (2;3), (2;4), (2;5); (3;4), (3;5); (4;5).

Каждая из пар может появиться с равной вероятностью. В случае в) благоприятным будет исход (1,2), в случае г) исходы (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), а в случае д) все исходы кроме (1,2), (3,4).

Для решения задачи е) приведенного списка не достаточно, так как в нём не учтен порядок в котором берут шары. Учитывающий порядок список будет содержать в два раза больше элементов:

(1;2), (1;3), (1;4), (1;5);
(2;1), (2;3), (2;4), (2;5);
(3;1), (3;2), (3;4), (3;5);
(4;1), (4;2), (4;3), (4;5);
(5;1), (5;2), (5;3), (5;4).

Благоприятными будут (1,3), (1,4), (2,3), (2,4).

Ответ: а) $2/5$; б) $3/5$; в) $1/10$; г) $4/10$; д) $8/10$; е) $4/20$.

3. Монету бросили три раза. Какова вероятность, что

- а) решка выпала один раз;
- б) после орла выпала решка.

Решение: Оформим решение в виде таблицы:

	а)	б)
PPP		
OOP	+	+
OPO	+	+
OPP		+
POO	+	
POP		+
PPO		
PPP		

В левом столбце таблицы перечислены возможные равновероятные последовательности выпадения орла и решки, а во втором и третьем столбцах отмечены те из них, которые являются благоприятными для событий из пунктов задачи.

Ответ: а) $3/8$ б) $4/8=1/2$.

4. Игральную кость бросили два раза. Какова вероятность, что

- а) первый раз выпало меньше очков, чем во второй;

б) сумма выпавших очков не превосходит трёх.

Решение: Все возможные равновероятные исходы описанного в задаче эксперимента можно изобразить в виде таблицы:

	1	2	3	4	5	6
1	б	б				X
2	а, б					
3	а	а				
4	а	а	а			
5	а	а	а	а		
6	а	а	а	а	а	

Мы считаем, что клетка, где стоит буква X соответствует случаю, когда первый раз выпало 6, а во второй раз 1. Буквой а помечены клетки соответствующие пункту а) буквой б помечены клетки соответствующие пункту б).

Ответ: а) $15/36$, б) $3/36$.

Упражнения.

- Правильную игральную кость бросили 2 раза. Какова вероятность, что
 - хотя бы раз выпала тройка;
 - сумма очков больше трёх;
 - разность очков меньше двух?
- Игрок случайным образом выбрал кость домино. Какова вероятность, что это
 - тройка;
 - дубль?
- В ящике лежат 4 белых и 2 черных шара.
 - Случайным образом взяли 3 шара. Какова вероятность, что они одного цвета?
 - Случайным образом взяли 5 шаров. Какова вероятность, что среди них 2 черных?
- В колоде две козырных карты и три не козырных. Игрок взял три карты. Какова вероятность, что среди них не менее одного козыря?
- Из букв слова ПАРТА случайным образом взяли две и положили в ряд. Какова вероятность, что получилось слово ПА?
- Маленький ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы "Т", "О" и "Р". В некоторый момент времени он выложил их в ряд. Какова вероятность, что получилось осмысленное слово?
- Какова вероятность, что случайно выбранное двузначное число
 - делится на три;
 - делится на семь;
 - имеет сумму цифр большую 15?
- Три шара случайным образом разложили по трем ящикам. Какова вероятность, что в первом белый, во втором черный, в третьем красный, если
 - все ящики не пусты;
 - если некоторые ящики могут быть пустыми?
- Четыре шара, из которых белых ровно два, разложили по трем ящикам. Какова вероятность, что белые лежат в одном?
- В первом ящике один белый и два черных шара. Во втором - два белых и два черных. Из первого во второй переложили шар. Затем из второго взяли шар. Какова вероятность, что он белый?
- Задача о наследовании признака.* Каждый из родителей имеет генотип Аа или АА с равной вероятностью. Какова вероятность, что ребенок имеет ген А , если один ген он наследует от матери, а другой от отца.

Комментарий. Принято считать, что обусловленный генетически признак соответствует наличию некоторого гена (А) в некоторой аллели. Причем второй ген этой аллели может быть любым. (Мы считаем что он А с вероятностью 0.5, что , в общем то, необязательно). Поэтому в задаче на самом деле спрашивается, какова вероятность, что ребенок унаследует признак, если каждый из родителей этим признаком обладает. При этом предложена некоторая математическая модель наследования. Интересно также рассмотреть другие модели. Например, если признак

наличествует в случае гена А в одной аллели и гена В в другой, если вероятность для второго гена не 0,5 и т.п.

12. Участок сельскохозяйственных угодий имеет смысл орошать искусственно, если вероятность засушливого лета более 30 процентов. Лето считается засушливым, если из четырёх первых декад лета засушливы более трёх. Имеет ли смысл орошать участок, если для этого участка вероятность засушливой декады 50 процентов ?

Геометрические вероятности

Метод геометрических вероятностей состоит в простейшем обобщении классического подхода на случай, когда множество равновероятных исходов бесконечно. При этом в качестве “числа исходов” берут длину, площадь или объем соответствующей фигуры.

Примеры.

1. Самолёт сбрасывает бомбу в любую точку круга радиусом 20 м с равной вероятностью. Какова вероятность, что он попадает в здание шириной 10 м и длиной 20 м, стоящее внутри круга?

Решение: Искомой вероятностью следует считать отношение площади здания к площади круга.

$$\text{Ответ: } \frac{200}{400\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

2. Пешеход подошел к автобусной остановке. Какова вероятность, что он уедет в течении 5 минут, если интервал движения автобуса 15 минут.

$$\text{Ответ: } 5/15=1/3.$$

3. Задача о встрече. Два друга договорились о встрече. Каждый приходит в условленное место в любой момент времени с 12 часов до 13 часов с равной вероятностью. Какова вероятность, что они встретятся, если каждый из них ждет другого 30 минут?

Решение: Пусть x – время, в которое пришел первый, а y – время в которое пришел второй. Тогда множество возможных исходов это квадрат с вершинами (12;12), (12;13), (13;12), (13;13) на координатной плоскости. Множество возможных исходов – это точки квадрата удовлетворяющие условию $|x - y| \leq 0,5$. Это множество можно получить, исключив из квадрата треугольник с вершинами (12,5;12), (13;12), (13;12,5) и треугольник, симметричный ему относительно прямой $x = y$. Суммарная площадь этих треугольников 1/4.

$$\text{Ответ: } 3/4.$$

Упражнения.

1. Пассажир, опаздывающий на поезд, подошел к автобусной остановке в 21 час 15 минут. Какова вероятность, что он успеет на поезд, если поезд отправляется в 21 час 50 минут, автобус идет до вокзала 15 минут, на посадку в поезд требуется 5 минут, а интервал движения автобуса 20 минут?

2. Какова вероятность, что два курьера встретятся на работе, если каждый из них бывает там в течении получаса в период от девяти до двенадцати часов дня?

3. Снаряд миномета попадает с равной вероятностью в любую точку круга радиуса 10 метров с центром в точке прицеливания. При этом он поражает все цели, находящиеся от него на расстоянии не более 7 метров. Какова вероятность поразить цель, находящуюся в точке прицеливания с одного выстрела?

4. Плоскость разграфлена параллельными линиями, находящимися друг от друга на расстоянии 5 сантиметров. На плоскость наудачу брошена монета диаметром 2 сантиметра. Какова вероятность, что монета не пересечет ни одну из линий ?

5. *Задача Бюффона.* Плоскость разграфлена параллельными линиями находящимися друг от друга на расстоянии 3 сантиметра. На плоскость наудачу брошена игла длиной 3 сантиметра. Какова вероятность, что игла не пересечет ни одну из линий?

6. После аварии на химкомбинате произошел выброс вредных веществ, представляющий собой облако радиусом 400 м. На расстоянии 5 км от завода находится детское учреждение. Приблизительно можно считать, что центр облака осядет в любой точке находящейся от химкомбината на расстоянии не более 7 км с равной вероятностью. Немедленная эвакуация детей считается необходимой, если риск оказаться в зараженной территории превышает 3 процента. Является ли в описанной ситуации немедленная эвакуация необходимой ?

Элементы комбинаторики

Рассмотрим задачу:

Задача о шарах. В ящике находятся десять белых и семь черных шаров. Случайным образом взяли пять шаров. Какова вероятность, что среди них

а) ровно три белых;

б) первые три белых а последние два черных?

Принципиально эта задача ни чем не отличается от рассмотренных нами ранее, однако выписать все наборы из пяти шаров представляется трудоемкой задачей. С другой стороны, для вычисления вероятностей достаточно знать общее количество наборов и количество благоприятных наборов. Раздел математики, который дает формулы для подобных подсчетов называется комбинаторикой.

Определение. Число упорядоченных наборов длины k , составленных из n элементов, называется **числом размещений** n по k .

Обозначение A_n^k .

Пример. $A_5^2 = 20$.

Пояснение:

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),
(2,1), (2,3), (2,4), (2,5),
(3,1), (3,2), (3,4), (3,5),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,5),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4).

Определение. Число неупорядоченных наборов длины k , составленных из n элементов, называется **числом сочетаний** из n по k .

Обозначение C_n^k .

Пример. $C_5^3 = 10 = C_5^2$.

Пояснение: (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5),
(2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5).

Определение. Размещения n по n называются **перестановками** n элементов.

Обозначение. P_n - число перестановок.

Пример: $P_3 = 6$. Пояснение: бчк, бкч, чкб, чбк, кбч, кчб.

Для вычисления числа сочетаний, размещений и перестановок используют следующие основные комбинаторные формулы:

$$P_n = n! \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$. Читается “эн факториал”.

Решим теперь задачу о шарах.

В задаче а) возможные исходы это сочетания из 17 по 5 элементов. Благоприятные исходы это такие сочетания, которые состоят из трех белых шаров и двух черных. К каждому из C_{10}^3 сочетаний трех белых можно добавить два черных C_7^2 способами. Поэтому число благоприятных исходов равно $C_{10}^3 \cdot C_7^2$. Выполним вычисления:

$$C_{17}^5 = \frac{17!}{5!12!} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 17 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 13$$

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 \cdot 8, \quad C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 7 \cdot 3$$

$$p = \frac{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3}{17 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 2}{17 \cdot 13} = \frac{90}{221}$$

В задаче б) важен порядок шаров, поэтому возможные исходы это размещения из 17 по 5, а число благоприятных исходов равно $A_{10}^3 \cdot A_7^2$. Вычисления:

$$p = \frac{A_{10}^3 \cdot A_7^2}{A_{17}^5} = \frac{(10 \cdot 9 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 6)}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{9}{221}$$

Ответ: а) 90/221 б) 9/221.

В основе вывода формул для чисел размещений, сочетаний и перестановок лежит следующий принцип произведения:

Если необходимо составить набор из k элементов, причем первый элемент мы можем выбрать m_1 способами, второй элемент – m_2 способами, ..., k -й элемент – m_k способами, то это можно сделать $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ способами.

Пример. Сколькими способами можно разложить k шаров по n ящикам?

Решение: Для каждого из шаров следует выбрать номер ящика, в который его следует положить.

Таким образом, нужно составить набор из k номеров ящиков. Если разрешается класть несколько шаров в один ящик, то каждый элемент набора можно выбрать n способами и общее число способов равно $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k$. Если разрешается в ящик класть не более одного шара, то

ящик для первого шара можно выбрать n способами. Для второго – $(n-1)$ способами, так как один шар уже лежит в первом ящике. И так далее. Для k -го – $(n-k+1)$ способами. Общее число способов по принципу произведения равно

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ответ: n^k или $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Нетрудно видеть, что доказательство формулы для числа размещений содержится в рассмотренном примере. Формула для числа перестановок является ее следствием.

Докажем формулу для числа сочетаний. Для этого посчитаем число размещений n по k другим способом. Сначала возьмем неупорядоченный набор из k элементов. Это можно сделать C_n^k способами. Затем упорядочим его. Это можно сделать P_k способами. Общее число упорядоченных наборов A_n^k по принципу произведения равно $C_n^k \cdot P_k$.

$$\text{Поэтому } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

Упражнения.

1. Выписать все размещения 6 элементов по 2 местам.
2. Выписать все перестановки четырёх элементов.
3. Выписать все сочетания из 6 элементов по 3.
4. Выписать все подмножества множества $\{1,2,3,4,5\}$, включая пустое. Сколько их всего? Сколько подмножеств содержат 0, 1, 2, 3, 4 и 5 элементов?
5. Группе из 10 студентов досталось три билета на престижную дискотеку. Сколькими способами их можно распределить?
6. Группа из 10 студентов должна выбрать старосту, профорга и культорга. Сколькими способами это можно сделать?
7. В танцевальном кружке 5 юношей и 5 девушек. Сколько имеется различных способов распределить их по парам?
8. Сколькими различными способами можно собрать гирлянду из пяти лампочек, если имеются лампочки трёх цветов и лампочки расположенные рядом должны иметь разные цвета?
9. В ящике находятся восемь белых и одиннадцать красных шаров. Случайным образом взяли шесть шаров. Какова вероятность, что среди них
 - а) четыре белых и два красных;
 - б) первые четыре белых, а последние два красных;
 - в) не менее четырех белых?

10. В ящике находятся шесть белых, семь черных и восемь красных шаров. Случайным образом взяли девять шаров. Какова вероятность, что среди них два белых, три черных и четыре красных?
11. В ящике находятся шесть белых, семь черных и восемь красных шаров. Случайным образом взяли два шара. Какова вероятность, что они будут разного цвета?
12. Из колоды 32 листа случайным образом берут две карты. Какова вероятность что они будут одной масти?
13. Студент знает 12 вопросов из 15. В билете 4 вопроса. Какова вероятность, что он ответит по крайней мере на 3 из них?
14. Из 25 билетов лотереи 6 выигрышных. Какова вероятность, что из 7 случайным образом выбранных билетов выиграют 3?
15. По плану мелиорации земель некоторого района планируется осушить 5 болот. На первом этапе мелиорации необходимо осушить 3 болота из 5. Сколькими различными способами можно выбрать три болота для осушения на первом этапе? Выпишите эти способы.

Действия с событиями и их свойства

Мы рассмотрели понятие вероятности и методы вычисления вероятности для случайных экспериментов, когда удаётся выделить множество (конечное или бесконечное) равновероятных исходов. Однако на практике часто встречаются и ситуации иного рода: вероятности некоторых событий известны, а вероятности некоторых других событий, связанных с первыми, требуется найти. В качестве примера можно привести следующую задачу.

Задача о стрелках. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,6, второй - с вероятностью 0,7, третий - с вероятностью 0,8. Стрелки сделали по одному выстрелу в мишень. Какова вероятность, что

- а) первый и второй стрелок попали в мишень;
- б) все три стрелка попали в мишень;
- в) первый или второй стрелок попали в мишень;
- г) мишень поражена;
- д) в мишени ровно одно попадание.

Для того чтобы решить эту задачу нам требуется ввести целый ряд новых понятий: первым делом мы должны уяснить, как события, вероятности которых требуется найти, связаны с событиями, вероятности которых известны, затем произвести классификацию событий, дать определение вероятности и, наконец, ввести так называемые независимые события. Кроме того, в данном пособии мы рассмотрим понятие условной вероятности и формулы полной вероятности и Байеса.

Определение. Произведением событий называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят все рассматриваемые события.

Определение. Суммой событий называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из рассматриваемых событий.

Определение. Противоположным событием называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда данное событие не происходит.

Обозначения. Если даны два события, обозначаемые A и B , то их сумму будем обозначать $A + B$, произведение будем обозначать AB , а событие противоположное A будем обозначать $\bar{A}$.

Оказывается любую связь между событиями можно записать формулой содержащей только три указанных действия с событиями.

Можно установить, что для введённых действий с событиями справедливы следующие тождества:

1. $AB = BA$
2. $A + B = B + A$
3. $(AB)C = A(BC) = ABC$
4. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
5. $A(B + C) = AB + AC$
6. $A + BC = (A + B)(A + C)$
7. $AA = A$

8. $A + A = A$
9. $A + AB = A$
10. $A(A + B) = A$
11. $\overline{\overline{A}} = A$
12. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
13. $\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$

Докажем, например справедливость тождества 7. Равенство событий означает, что одно из них происходит тогда и только тогда когда происходит второе. Пусть происходит правая часть, т.е. событие A , тогда происходит каждый из сомножителей стоящих в левой части, т.е. левая часть тоже происходит. Пусть происходит левая часть. Так как происходит произведение то происходит каждый из сомножителей т.е. событие A . Аналогичными рассуждениями основанными на определениях можно доказать и остальные тождества.

Заметим, что тождества 3 и 4 можно рассматривать также как определения суммы и произведения для трёх и более слагаемых. Они также остаются справедливыми, если считать определения суммы и произведения событий применимыми к произвольному количеству слагаемых и сомножителей.

Пример 1. Пусть в задаче о стрелках A обозначает событие, происходящее тогда и только тогда, когда первый стрелок попал в мишень, B обозначает событие, происходящее тогда и только тогда, когда второй стрелок попал в мишень и C обозначает событие, происходящее тогда и только тогда, когда третий стрелок попал в мишень. Записать события, вероятности которых требуется найти, используя введённые обозначения и действия с событиями.

Ответ: а) AB ; б) ABC ; в) $A + B$; г) $A + B + C$; д) $\overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$.

Классификация событий

Определение. Событие называется достоверным, если оно происходит при каждом проведении случайного эксперимента, событие называется невозможным, если при каждом проведении случайного эксперимента оно не происходит.

Будем обозначать достоверное событие буквой D , а невозможное буквой H . Тогда к тождествам 1- 13 можно добавить следующие:

14. $A + \overline{A} = D$
15. $\overline{AA} = H$
16. $A + H = A$
17. $AH = H$
18. $A + D = D$
19. $AD = A$
20. $\overline{H} = D$
21. $\overline{D} = H$

Определение. События называются несовместными, если они не могут произойти одновременно.

Другими словами события A и B несовместны, если $AB = H$. В частности, A и $\overline{A}$ несовместны.

Определение и свойства вероятности

Определение. Пусть каждому событию A поставлено в соответствие число $P(A)$. Если выполняются условия

1. $P(A) \geq 0$,
 2. $P(D) = 1$,
 3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместны,
- то число $P(A)$ называется вероятностью события A .

Таким образом, мы называем вероятностью любую функцию на множестве событий удовлетворяющую свойствам 1,2,3. И наоборот, если мы называем некоторую функцию вероятностью, то полагаем, что свойства 1,2,3 выполняются. Нетрудно проверить, что классический и геометрический способы подсчёта вероятностей, рассмотренные ранее, удовлетворяют свойствам 1,2,3.

Из свойств 1,2,3 нетрудно вывести дополнительные свойства, полезные при решении задач.

4. $P(A) \leq 1$.

Доказательство: $1 = P(D) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \geq P(A)$, так как $P(\bar{A}) \geq 0$.

Из приведённых выкладок следует также свойство 5.

5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

6. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Доказательство: Заметим, что события AB , $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ и $\bar{A}\bar{B}$ попарно несовместны, так как, например $(AB)(A\bar{B}) = (AA)(B\bar{B}) = AH = H$.

Далее $A = AD = A(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$, аналогично $B = AB + \bar{A}B$.

Кроме этого

$$A + B = (AB + A\bar{B}) + (AB + \bar{A}B) = (AB + AB) + A\bar{B} + \bar{A}B = AB + A\bar{B} + \bar{A}B$$

Наконец

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(AB) &= P(AB + A\bar{B}) + P(AB + \bar{A}B) - P(AB) = \\ &= P(AB) + P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) - P(AB) = \\ &= P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(AB + A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A + B) \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

В последнем доказательстве мы воспользовались тем, что тождество аналогичное 3 справедливо для трёх попарно несовместных слагаемых, как, впрочем, и для любого конечного числа. Современная математическая теория вероятностей постулирует это тождество для счётного количества слагаемых, мы, однако считаем, что на практике без этого можно обойтись. Покажем его справедливость для трёх слагаемых. Если события A , B и C попарно несовместны, то

$$(A + B)C = AC + BC = H + H = H, \text{ т.е. } A + B \text{ и } C \text{ несовместны, поэтому}$$

$$P(A + B + C) = P(A + B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Независимые события

Определение. События A и B называются независимыми, если

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1)$$

Замечание. В соответствии с этим определением для установления независимости событий необходимо доказывать равенство (1), однако на практике его обычно не доказывают, а считают вытекающим из существа задачи, т.е. фактически считают дополнительной аксиомой. Для установления равенства $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ кроме независимости событий A и B требуется ещё независимость событий AB и C . Соответствующие предположения во многих задачах, например в задаче о стрелках, достаточно естественны. Во всяком случае, без подобных предположений решить задачу о стрелках в приведённой формулировке решить невозможно.

Решим теперь задачу о стрелках, используя обозначения примера 1, свойства вероятности и независимость событий.

а) $P(AB) = P(A)P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$;

б) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336$;

в) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88$;

$$\begin{aligned} \text{г) } P(A+B+C) &= 1 - P(\overline{A+B+C}) = 1 - P(\overline{ABC}) = \\ &= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,024 = 0,976; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } P(\overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}) &= P(\overline{ABC}) + P(\overline{ABC}) + P(\overline{ABC}) = \\ &= P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) = \\ &= 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188. \end{aligned}$$

Ответ: а) 0,42; б) 0,336; в) 0,88; г) 0,976; д) 0,188.

Упражнения.

1. В первом ящике один белый и четыре чёрных шара, во втором ящике два белых и три чёрных шара, в третьем ящике три белых и два чёрных шара. Из каждого ящика случайным образом выбрали по одному шару. Какова вероятность, что все три шара чёрные? Какова вероятность, что среди взятых шаров ровно два белых? Какова вероятность, что среди взятых шаров не менее двух белых?
2. Игральную кость бросают до появления шестёрки. Какова вероятность, что бросят не более трёх раз?

Условная вероятность

Теперь мы знаем, как найти вероятность произведения событий, если условия задачи позволяют предположить их независимость. А как быть, если сомножители заведомо не являются независимыми? Здесь может помочь концепция условной вероятности.

Определение. Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло, называется число $\frac{P(AB)}{P(A)}$.

Обозначение: $P(B/A)$ или $P_A(B)$.

Таким образом, условная вероятность определяется равенством

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Пример 2. Игральную кость бросили два раза. Найти вероятность, что тройка выпала хотя бы раз, если известно, что сумма выпавших очков меньше шести.

Решение: Пусть событие A состоит в том, что сумма выпавших очков меньше шести, а событие B состоит в том, что тройка выпала хотя бы раз. Тогда вероятность, которую надо найти это $P(B/A)$. Изобразим множество равновероятных исходов в виде таблицы.

	1	2	3	4	5	6
1	a	a	a,b	a		
2	a	a	a, b			
3	a,b	a,b	b	b	b	b
4	a		b			
5			b			
6			b			

Буквой а помечены элементарные исходы, соответствующие событию A , буквой b помечены элементарные исходы соответствующие событию B . При этом событию AB соответствуют исходы, помеченные двумя буквами. Поэтому

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{4}{10} = 0,4$$

Ответ: 0,4.

Замечание. Искомую условную вероятность мы могли найти и непосредственно с помощью классического способа подсчета вероятности. Если сумма выпавших очков меньше шести, то

возможны и равновероятны следующие исходы: (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (4,1). Из них благоприятны исходы: (1,3); (2,3); (3,1); (3,2). Поэтому искомая вероятность равна 4/10.

Упражнения.

1. Игральную кость бросили два раза. Найти вероятность, что сумма выпавших очков меньше шести, если известно, первый раз выпало больше чем во второй.
2. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,6, второй - с вероятностью 0,7. Стрелки сделали по одному выстрелу в мишень. Какова вероятность, что первый стрелок попал в мишень, если известно, что в мишени ровно одно попадание?

Теорема произведения вероятностей

Формально равенство **Ошибка! Источник ссылки не найден.** является определением условной вероятности. Однако в некоторых случаях условную вероятность можно найти непосредственно, тогда **Ошибка! Источник ссылки не найден.** можно использовать для отыскания вероятности произведения событий:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \quad (2)$$

Последняя формула допускает обобщение на случай произвольного количества сомножителей:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

и называется теоремой произведения вероятностей.

Докажем её для случая трех сомножителей. Так как $ABC = (AB)C$, то на основании (2) имеем

$$P(ABC) = P(AB)P(C/AB)$$

Ещё раз применив (2) к первому сомножителю, имеем

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB) \quad (3)$$

Для четырёх сомножителей имеем:

$$P(ABCD) = P(ABC)P(D/ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC)$$

Мы последовательно использовали равенства (2) и (3). Аналогично доказывается теорема произведения вероятностей и для произвольного количества сомножителей.

Пример 3. В ящике три белых, четыре чёрных и пять красных шаров. Случайным образом выбрали пять шаров. Какова вероятность, что первый белый, второй и третий чёрные, четвёртый и пятый красные.

Решение: Пусть A обозначает событие, состоящее в том, что первый шар белый, B обозначает событие состоящее в том, что второй шар чёрный, C обозначает событие состоящее в том, что третий шар чёрный, D обозначает событие состоящее в том, что четвёртый шар красный, E обозначает событие состоящее в том, что пятый шар красный. Тогда

$$\begin{aligned} P(ABCDE) &= P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC)P(E/ABCD) = \\ &= \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{1}{132} \end{aligned}$$

Поясним подробнее, почему $P(C/AB) = 3/10$. Так как события A и B произошли, то в ящике осталось 10 шаров три из которых чёрные. Для события C имеем три благоприятных исхода из десяти равновероятных.

Ответ: 1/132.

Упражнения.

1. Буквы слова БАРАБАН написали на семи карточках, затем случайным образом выбрали пять карточек, и положили в ряд. Какова вероятность, что получится слово БАРАН?
2. В ящике пять белых и четыре чёрных шара. Шары берут до появления белого. Какова вероятность, что возьмут три шара?

Формулы полной вероятности и Байеса

Определение. События $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу, если они попарно несовместны и их сумма есть достоверное событие.

Другими словами, события образуют полную группу, если при каждом проведении случайного эксперимента одно из них обязательно происходит, причём только одно.

Теорема. Если события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу, то для любого события A справедливы равенства

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n) \quad (4)$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)} \quad (5)$$

для $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} 1) P(A) &= P(ДА) = P((H_1 + \dots + H_n)A) = P(H_1A + \dots + H_nA) = \\ &= P(H_1A) + \dots + P(H_nA) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n) \end{aligned}$$

$$2) P(H_i/A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)}$$

Что и требовалось доказать.

Формула (4) называется формулой полной вероятности, а формула (5) формулой Байеса.

Пример 4. В ящик попадают детали с трёх станков. Первый даёт три процента брака, второй четыре процента, а третий 5 процентов. Какова вероятность, что случайно выбранная деталь бракована, если производительность второго станка выше производительности первого в полтора раза, а производительность третьего станка выше производительности первого в два с половиной раза? Взятая из ящика деталь оказалась бракованной. Какова вероятность, что она изготовлена на втором станке.

Решение: Пусть событие H_1 состоит в том, что случайно выбранная деталь изготовлена на первом станке, событие H_2 состоит в том, что случайно выбранная деталь изготовлена на втором станке, событие H_3 состоит в том, что случайно выбранная деталь изготовлена на третьем станке, событие A состоит в том, что случайно выбранная деталь, бракована. Пусть число деталей изготовленных на первом станке равно x . Тогда число деталей изготовленных на втором станке равно $3x/2$, а число деталей изготовленных на третьем станке равно $5x/2$. Общее число деталей в ящике равно

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{5x}{2} = 5x$$

$$\text{Поэтому } P(H_1) = \frac{x}{5x} = 0,2, \quad P(H_2) = \left(\frac{3x}{2}\right) / (5x) = 0,3, \quad P(H_3) = \left(\frac{5x}{2}\right) / (5x) = 0,5.$$

$$\text{По условию задачи } P(A/H_1) = 0,03, \quad P(A/H_2) = 0,04, \quad P(A/H_3) = 0,05.$$

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ &= 0,2 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,05 = 0,43 \end{aligned}$$

По формуле Байеса

$$\begin{aligned} P(H_2/A) &= \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} = \\ &= \frac{0,3 \cdot 0,04}{0,2 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,05} = \frac{12}{43} \end{aligned}$$

Ответ: 0,43, $\frac{12}{43}$.

Упражнения.

1. В лесу здоровых лосей 80 процентов. Зиму переживают 90 процентов здоровых лосей и 50 процентов больных. Какой процент лосей переживёт зиму. Какой процент здоровых лосей будет среди лосей переживших зиму?
2. В первом ящике пять белых и четыре чёрных шара. Во втором ящике три белых и два чёрных шара. Из первого во второй переложили два шара, затем из второго взяли шар. Какова вероятность, что он белый? Какова вероятность, что переложили два белых шара, если взятый из второго ящика шар оказался белым?