$$x = -\frac{42}{15}$$

Ответ: $-\frac{42}{15}$

2-й способ.

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & x & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = 2(4) \text{ способ} = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2-x^2 & y-x & 0 \\ z^2-x^2 & z-x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y^2-x^2 & y-x \\ z^2-x^2 & z-x \end{vmatrix} = (y-x)\begin{vmatrix} y+x & 1 \\ z+x & 1 \end{vmatrix}(z-x) =$$

$$= (y-x)(y-z)(z-x)$$

Матрицы и связанные с ними обозначения.

Опр. Таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов называется матрицей размера $m*n$, числа в таблице называются элементы матрицы.

Обоз: $A = \{a_{ij} \mid i = 1, \dots m;\ j \dots n\}$

Пример: 1) $A = \{i+j \mid i = 1,2;\ j = 1;2;3\} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2) Если $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \{ b_{ij};\ i = 1,2,3;\ j = 1,2 \}$

$b_{11} = -1$; $b_{22} = -4$; $b_{31} = 5$ и т.д.

② . Сложение и умножение матриц.

Опр. Если A и B матрицы размера $m \times n$,

k - число, то матрица $C = \{ c_{ij};\ i = 1, \dots n;\ j = 1 \dots n \}$

так, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ называется суммой матрицей A и B, а матрица $D = \{ d_{ij},\ i = 1, \dots m;\ j = \dots$

где $d_{ij} = k a_{ij}$ называется результатом умножения A на число k.

Обозн. $C = A + B$; $D = kA$

Пример

$$2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

Опр. Если $A = \{ a_{ij};\ i = 1 \dots m,\ j = 1, \dots n \}$,

$B = \{ b_{jk},\ j = 1, \dots n;\ k = 1, \dots e \}$ тогда произведе[нием]

матриц A и B назыв. матриц.

$C = \{ C_{ik};\ i = 1, \dots m;\ k = 1, \dots e \}$, так как т.

$$C_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots a_{in} b_{n1_3} = \sum_{j=k} a_j b_{jk}.$$

<u>Замечание</u>: Для того чтобы матрицы можно было перемножить нужно чтобы число столбцов в первом сомножителе было равно число строк во втором. При этом произведение имеет столько же строк сколько первый сомножитель, и столько же столбцов сколько второй сомножитель.

<u>Замечание</u>: Элемент стоящий в i-й строке и k-м столбце произведения получается как сумма произведений элементов i-й строки i-го сомножителя на элементы k-го столбца второго сомножителя.

<u>Пример</u>: Вычислить $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Решение</u>: Пусть произведение равно

$C = \{ C_{ij};\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3 \}$.

$C_{11} = (2\ -3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 = -5$.

$C_{12} = (2\ -3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (-3)(-1) = 7$.

$C_{13} = (2\ -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 = -9$

$C_{21} = (1\ 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$C_{22} = (1\ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$$C_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 6.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -5 & 7 & -9 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Единичная и обратная матрица.

Опр. Матрица E называется единичной, если

1) для любой матр. A имеем $AE = A$
2) для любой матр. B им $EB = B$.

Утверждение. Матрица E есть квадратичная матрица, единственная для каждого (числа строк = числу столбцов).

$$E_n = \{ e_{ij} \mid i = 1 \ldots n,\ j = 1 \ldots n \},$$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Примеры. $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Доказать утв.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Опр. Матрица B называется обратной к матрице A, если $AB = BA = E$

Обозн. $B = A^{-1}$

Утв. A^{-1} существует, то A квадратная матрица и $\det(A) \neq 0$

Утв. Если A квадратная матрица и $\det(A) \neq 0$, то $A^{-1} = \{ b_{ij} ; i = 1, \dots n ; j = 1 \dots \}$

причем $b_{ij} = \frac{1}{|\Delta|} A_{ji}$ где A_{ji} алгебр. дополн. к a_{ji}

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ най. A^{-1}.

Решение: $\det(A) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1$

Пусть $A^{-1} = \{ b_{ij} ; i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3$.

$b = \frac{1}{(-1)} A_{11} = (-A (-1) \cdot 1 \cdot 4 = -4$

$b_{12} = \frac{1}{(-1)} A_{21} = \frac{1}{(-1)} \cdot (-1)^{2+1} \cdot 3 = 3$

$b_{21} = \frac{1}{(-1)} A_{12} = \frac{1}{(-1)} (-1)^{n\,2} \cdot 3 = 3$.

$b_{22} = \frac{1}{(-1)} A_{22} = \frac{1}{(-1)} (-1)^{2+2} \cdot 2 = -2$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Проверка}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$