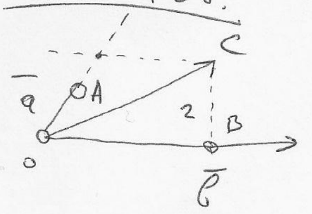
④ Разложение вектора по базису

Утв. 1 Если $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ лежат в одной плоскости, $\bar a \ne \bar b$ и $\bar a$ и b не параллельны, то найдутся числа k и l такие, что

$\bar c = k\bar a + l\bar b$.



$CA_1 \parallel OB$

$CB_1 \parallel OA$

$\Rightarrow OA_1CB_1$ - параллелограмм.

$$\overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} = k\overline{OA} + l\,\overline{OB}$$

Утв. 2. Если $\bar a, \bar b, \bar c$ не лежат в одной плоскости, то для любого вектора d называются числа k_a, k_b, k_c такие что

$$\bar d = k_a \bar a + k_b \bar b + k_2 \bar c$$

Следовательно: Если $\bar e_x$, $\bar e_y$, e_z векторы длины 1 отложенные от начала координат вдоль осей координат, то для любого вектора $\bar a$ называется a_x, a_y, a_z такие, что

$$\bar a = a_x \bar e_x + a_y \bar e_y + a_z \bar e_z$$

Замечание. $(a_x; a_y; a_z)$ - координаты вектора $\bar a$.

$\bar a \parallel b$ и $b \parallel c \Rightarrow \bar a \parallel \bar c$

Опр. $\bar a \bar b = |\bar a|\,|\bar b| \cos\alpha$

Опр. с св-а 1. $\bar a \bar b = \bar b \bar a$

Линейность $\begin{cases} 2.\ \bar a(\bar b + \bar c) = \bar a \bar b + \bar a \bar c \\ 3.\ \bar a(k\bar b) = k(\bar a \bar b) \end{cases}$

Утв. 3 Пусть $\bar a = (a_x; a_y a_z) = a_x \bar e_x + a_y \bar e_y + a_z \bar e_z$,

$\bar b = (b_x, b_y; b_z) = b_x \bar e_x + b_y \bar e_y + b_z \bar e_z$.

$$\bar a \bar b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Замечание $\bar a \bar b = (a_x\ a_y\ a_z)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

Док-во $\bar a \bar b = (a_x \bar e_x + a_y \bar e_y + a_z \bar e_z)(b_x \bar e_x + b_y \bar e_y + b_z \bar e_z) =$

$= (2) = (a_x \bar e_x + a_y \bar e_y + a_z b_z)\, b_x \bar e_x + (a_x \bar e_x + a_y \bar e_y + b_z) b_y$

$+ (a_x \bar e_x + a_y b_y + a_z b_z) \cdot b_z \bar e_z = (1,2,1) = (a_x \bar e_x)$

$(b_x \bar e_x) + (a_y \bar e_y)(b_x \bar e_x) + (a_z \bar e_z)(b_x \bar e_x) + (a_x \bar e_x)$

$(b_y \bar e_x) + (a_x \bar e_y)(b_y \bar e_y) + (a_y \bar e_y)(b_y \bar e_y) + (a_x \bar e_x)$

$(b_z \bar e_z) + (b_z \bar e_z) + (a_y \bar e_z)(b_z e_z) + (a_z \bar e_z)(b_z b_z)$

$= (3,1) = (a_x b_x)\bar e_x \bar e_x + (a_y b_x)\bar e_y \bar e_x + (a_z b_x)$

$(\bar e_z \bar e_x) = (3,1) = (a_x b_x)\bar e_x \bar e_x + (a_y b_x)\bar e_y \bar e_x +$

$+ (\bar e_z \bar e_x) + (a_x b_y)(\bar e_x \bar e_y) + (a_y b_y)\bar e_y \bar e_y + (a_z b_y)(\bar e_z \bar e_y)$

$+ (a_x b_z)(\bar e_x \bar e_z) + (a_y b_z)(\bar e_y \bar e_z) + (a_z b_z)(\bar e_z \bar e_z) =$

$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, т.к.

$\bar e_x e_x = |\bar e_x||\bar e_x| \cos 0 = 1 = \bar e_y \bar e_y = \bar e_z \bar e_z$

$\bar e_x \bar e_y = |\bar e_x||\bar e_y| \cos 90^\circ = 0 = \bar e_y \bar e_x = \bar e_x \bar e_z = \bar e_z = \bar e_y \bar e_z\ \bar e_z = \bar e_z \bar e_y$

и т.д.

Векторное произведение

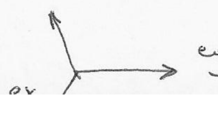
Векторным пр-ем векторов $\bar a$ и $\bar b$ наз. вектор $\bar c$ такой что

1) $|\bar c| = |\bar a||\bar b| \sin\alpha$

2) $\bar c \perp \bar a$ и $\bar c \perp \bar b$

3) Направление выбирается по правилу „буравчика".

Обозн. $\bar a \times \bar b$



1. $\bar{e}_x \times \bar{e}_x = \bar{e}_y \times \bar{e}_y = \bar{e}_z \times \bar{e}_z = \bar{0}$

2. $\bar{e}_x \times \bar{e}_y = \bar{e}_z = -\bar{e}_y \times \bar{e}_x$

3. $\bar{e}_y \times \bar{e}_z = \bar{e}_x = -\bar{e}_z \times \bar{e}_y$

4. $\bar{e}_z \times \bar{e}_x = \bar{e}_y = -\bar{e}_x \times \bar{e}_z$

(4) Опред. произв.

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

3. $\bar{a} \times (k\bar{b}) = k\bar{a} \times \bar{b}$

(4). Векторное произведение в координатах.

<u>Утв.</u> Если $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$\bar{a}\bar{b} = \bar{e}_x(a_y b_z - a_z b_y) - \bar{e}_y(a_x b_z - a_z b_x) + \bar{e}_z (a_x b_y - a_y b_x)$

<u>Упр.</u> Доказать. Указ. См. скал. произведение в коорд.

<u>Запог.</u>

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Дополн. оценки задач,

2 – (+/2) "решил половину".

2 – (∓) "есть элемент решения".