Лекция 17 октября 2013

Применение скалярного произведение векторов.

Пусть $A(-1;2;1)$, $B(3;-2;0)$, $C(-2;2;5)$

Найти $\cos\angle C$ в ΔABC.

Решение

$\bar a \cdot \bar b = |\bar a||\bar b|\cos\alpha$

$\bar a \cdot \bar b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$|\bar a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$\overline{CA} = ((-1)-(-2); 2-2; 1-5) = (1; 0; -4)$

$\overline{CB} = (3-(-2); -2-2; 0-5) = (5; -4; 5)$

$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 1\cdot 5 + 0\cdot(-4) + (-4)\cdot 5 = 25.$

другой стороны $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = |\overline{CA}||\overline{CB}|\cos\angle C \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle C = \dfrac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}||\overline{CB}|} = \dfrac{25}{\sqrt{17}\sqrt{66}}$

Применение векторного произведения векторов.

Найти площадь ΔABC если $A(2;-1;3)$, $B(3;-2;1)$, $C(0;-1;2)$

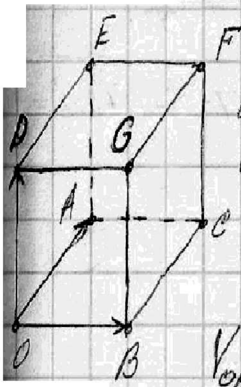
$\overline{AB} = (3-2; -2-(-1); 1-3) = (1; -1; -2)$

$\overline{AC} = (0-2; -2-(-1); 2-3) = (-2; 0; -1)$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar e_x & \bar e_y & \bar e_z \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \bar e_x \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - e_y \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + e_z \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1; 5; 2)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}||\overline{AC}|\sin\angle A = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$$

Объем параллелепипеда и смешанное произведение векторов.



Пусть $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ не параллельны, $OACB$ – параллелограм. Пусть $\overline{OD}$ не лежит в плоскости $OACB$. Отложив из точек O, A, C, B векторы равные OD получим вершины параллелепипеда $OACBDEFG$

$$V_{OACBDEFG} = h\cdot S_{OACB} = h\cdot|\overline{OA}||\overline{OB}|\sin\angle AOB =$$

(h – высота параллелограмма опущенная из D на $OACB$)

$$= h\cdot|\overline{OA}\cdot\overline{OB}| = h|\overline{OM}| = (|\overline{OD}|\cos\alpha)|\overline{OM}| = \overline{OD}\cdot\overline{OM} = \overline{OD}(\overline{OA}\cdot\overline{OB})$$

Опр. $\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)$ – называется смешанным произведением векторов $\bar a, \bar b, \bar c$.

Обозн. $(\bar a;\bar b;\bar c)$

св-ва
- 1) $(\bar a;\bar b;\bar c) = -(\bar a;\bar c;\bar b) = -(\bar b;\bar a;\bar c) = -(\bar c;\bar b;\bar a)$
- 2) $(\bar a;\bar b;\bar c_1+\bar c_2) = (\bar a;\bar b;\bar c_1)+(\bar a;\bar b;\bar c_2)$
- 3) $(\bar a;\bar b;k\bar c) = k(\bar a;\bar b;\bar c)$
- 4) $(\bar e_x;\bar e_y;\bar e_z) = 1$.

Упр. Если $\bar c = k\bar a$, то $(\bar a;\bar b;\bar c)=0$ (Доказать)

Смешанное произведение в координатах.

$$(\bar a;\bar b;\bar c) = \bar a\cdot(\bar b\times\bar c) = (a_x\bar e_x + a_y\bar e_y + a_z\bar e_z)\cdot\begin{vmatrix} \bar e_x & \bar e_y & \bar e_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} =$$

$$= a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z\\ c_y & b_z\end{vmatrix} + a_y\left(-\begin{vmatrix} b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}\right) + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$