Метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Пусть x и y удов. системе

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \qquad \left(-\frac{d}{a}\right)$$

добавим ко 2 уравнению первое умноженное $\left(-\frac{d}{a}\right)$ $(a \neq 0)$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ y\left(e - \frac{bd}{a}\right) = f - \frac{cd}{a} \end{cases}$$

$$y = \frac{f - \frac{cd}{a}}{e - \frac{bd}{a}} = \frac{af - cd}{ae - bd} \quad (1)$$

$$x = \frac{c - by}{a} = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\cdot\left(\frac{af - cd}{ae - bd}\right) =$$

$$= \frac{c(ae - bd) - b(af - cd)}{a(ae - bd)} = \frac{cae - baf}{a(ae - bd)} =$$

$$= \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad (2)$$

Для того, чтобы запомнить эти формулы а также обобщить на случай произвольного количества неизвестных используется определитель.

Таблица $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ называется <u>расширенной матрицей</u> системы (*), а

Таблица $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ называется матрицей системы (*)

Число $ae - bd$ называется определителем матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$

Обозначение: $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

В этих обозначениях формулы один два принима-ть. (1); (2).

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e & b \\ d & e \end{vmatrix}} ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Таблица $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ называется столбцом свободных членов системы (*). При данных определениях формулы (К) можно описать так: В системе линейных уравнений. Значение любой неизвестной можно найти как частное от деления определителя соответствующего этой неизвестной на определитель матрицы системы.

Определитель соответвующий неизвестной это определитель матрицы полученной из матрицы системы столбца коэффициентов при этой неизвестн на столбец свободных членов.

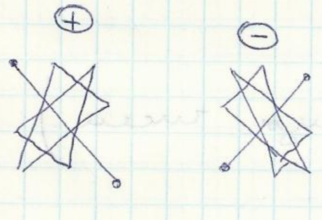
Замечание: факт состоит в том, что утверждение остается верным, если дать „правильное определение" для определителя квадратной матрицы любым числом.

Определителем матрицы $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ называется число:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Можно записать определитель одной формулой.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underline{aei} + \underline{bfg} + \underline{cdh} - \underline{cdg} - \underline{bdi} - \underline{afh}$$



Замечание: Формула (3) называется „разложением определителя по первой строке". Известно, что определитель можно аналогично разложить по любой строке и любому столбцу, используя таблицу знаков.

Числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений, Решение: $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(9-4) - 2((-6)-(-8)) + 4(4-12) =$$

$$= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-8) = -21$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 15 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 15 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 5 - 15 \cdot 2 + (-1) \cdot (-8) = -42$$

$$x = \frac{-42}{-21} = 2$$

Ответ: 2.

Матрица. (прямоугольная таблица чисел)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - называется матрицей системы (*.*)

Матрица.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

расширенная матрица системы.

Матрица $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ называется столбцом свободных членов.