**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСБЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДООБУСТРОЙСТВА**

МАТЕМАТИКА

**Методические указания и контрольные задания для
студентов 1 курса заочного отделения направления
190600 "Эксплуатация транспортно-технологических
машин и комплексов", профиль "Сервис
транспортных и транспортно-технологических машин
и оборудования"**

МОСКВА 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИРОДООБУСТРОЙСТВА

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов 1 курса заочного отделения направления 190600 "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", профиль "Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования"

Рекомендовано
Методической комиссией
заочного факультета

МОСКВА 2012

ББК 22.11
УДК 517.521

Составители: Васильева Е.Н., Веселова Г.В., Кажан В.А., Денисова О.И., Карнаухов В.М., Мусаелян А.Г., Саблин А.И.

Математика: Методические указания и контрольные задания для студентов 1 курса заочного отделения направления 190600 "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", профиль "Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования". М.: МГУП, 2012, 67 с.

Методические указания предназначены для студентов МГУ Природообустройства с целью повышения эффективности самостоятельной работы и выполнения контрольных заданий по курсу "Математика".

© Московский государственный университет природообустройства, 2012

Введение

В данном пособии находятся контрольные задания, методические указания для их выполнения и методические указания для подготовки к экзамену по курсу "Математика" для студентов первого курса заочного отделения обучающихся по направлению подготовки 190600 “Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования (водное хозяйство)”.
Для изучения материала рекомендуется пользоваться следующей литературой (в последующем тексте будут ссылки именно на указанные пособия).

Список литературы.

[1] В.С. Шипачев, Высшая математика, М.: Высшая школа, 1985.

[2] Н.С. Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, 2, М.: Наука, 1978.

[3] Я.С. Бугров, С.М. Никольский, Дифференциальное и интегральное исчисление, М.: Наука, 1980.

[4] В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский, Теория вероятностей и математическая статистика, М.: Высшая школа, 1991.

[5] В.Е. Гмурман, Теория вероятностей и математическая статистика, М.: Высшая школа, 1997.

[6] Г.Н. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа, М.: Наука 1985.

[7] Н.В. Ефимов, Краткий курс аналитической геометрии, М.: Наука, 1975.

Для допуска к экзамену студенты должны выполнить две контрольные работы. В контрольную работу № 1 входят задачи по темам 1-5, а в контрольную работу № 2 входят задачи по темам 6 – 9. В конце каждой темы имеется список задач для включения в контрольную работу. Вы должны решить все задачи, номера которых оканчиваются на ту же цифру, что и номер Вашей зачетной книжки. Например, если Ваша зачётная книжка имеет номер 96122, то из темы "Элементы векторной алгебры" вы должны решить задачу 102 , а из темы "Производная и её приложения" задачи 502, 512, 522.

При оформлении контрольных работ советуем придерживаться следующих правил: после номера задачи перепишите её полное условие из книжки, затем напишите слово "Решение" и затем запишите своё решение. Решать задачу можно любым известным Вам способом. После решения напишите слово "Ответ" и запишите полученный Вами ответ. Ответ должен соответствовать условию задачи.

В каждой теме перечислены основные теоретические вопросы по этой теме. При подготовке к экзамену следует иметь ввиду, что экзаменационные билеты составлены из этих вопросов.

Тема 1. Элементы векторной алгебры

Литература. [7], гл. VII-X.

Основные вопросы.

1. Понятие вектора. Координаты вектора. §§ 44 - 45.
2. Линейные операции над векторами в векторной и координатной формах. §§ 48 - 52.
3. Условие коллинеарности векторов. § 51.
4. Деление отрезка в данном отношении. § 47.
5. Скалярное произведение векторов: определение и свойства. § 53.
6. Скалярное произведение векторов в координатах. § 54.
7. Условие перпендикулярности двух векторов. § 54.
8. Векторное произведение векторов: определение и свойства. § 55.
9. Векторное произведение векторов в координатах. § 56.
10. Площадь треугольника. § 55.

11. Смешанное произведение векторов: определение и свойства. § 57.
12. Смешанное произведение векторов в координатах. § 58.
13. Условие компланарности векторов. § 58.
14. Объем тетраэдра. § 57.

Рассмотрим решение типичных задач по данной теме.

Пример 1. Даны вершины треугольника $A(3;\,2;\,-3)$, $B(5;1;\,-1)$, $C(1;\,-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине A.

Решение. Искомый угол $\hat{A}$ - это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдем координаты этих векторов. Для $\overrightarrow{AB}$: вычтем из координат конца (точки B) координаты начала (точки A):

$\overrightarrow{AB} = \{5-3;1-2;-1-(-3)\} = \{2;-1;2\}$. Аналогично для вектора $\overrightarrow{AC} = \{1-3;-2-2;1-(-3)\} = \{-2;-4;4\}$.

Вычислим косинус угла $\hat{A}$ по формуле $\cos\hat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, где

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ - скалярное произведение векторов, $\left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\overrightarrow{AC}\right|$ - длины векторов. Эта формула в координатах имеет следующий вид:

$$\cos\hat{A} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\text{, где}$$

$\overrightarrow{AB} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{x_2; y_2; z_2\}$. Подставим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\hat{A} = \frac{2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+2\cdot 4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+16+16}} = \frac{8}{3\cdot 6} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\arccos\frac{4}{9} \approx 70.68^0$.

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(1;2;0),\ B(3;0;-3),\ C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Площадь треугольника ABC находится по формуле

$S = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$, где $\vec{AB} \times \vec{AC}$ - векторное произведение.

Найдем координаты векторов , $\vec{AB} = \{2;-2;-3\}$,

$\vec{AC} = \{4;0;6\}$. Векторное произведение векторов

$\vec{a} = \{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2;y_2;z_2\}$ находится по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Здесь и далее две вертикальные линии применяются для записи определителя. Что такое определитель и как его вычислять см.[7].

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left((-2)\cdot 6 - 0\cdot(-3)\right) - \vec{j}\left(2\cdot 6 - 4\cdot(-3)\right) + \vec{k}\left(2\cdot 0 - 4\cdot(-2)\right) = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$$

Так получили вектор $\vec{AB} \times \vec{AC} = \{-12;-24;8\}$. Вычислим длину этого вектора:

$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28$.

Тогда площадь треугольника $S = \dfrac{28}{2} = 14$.

Пример 3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{c} = \{1; 9; -11\}$.

Решение. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, если смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равно нулю. Смешанное произведение векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$ находится по формуле $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Подставим координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(11-27) - 3(-11-3) - 1(9+1) = -32 + 42 - 10 = 0.$$

Поскольку смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равно нулю, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Задачи для контрольных работ.

101 - 110. Даны вершины пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$.
Найти: 1) внутренний угол при вершине A_1 в треугольнике $A_1A_2A_4$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

101. $A_1(3; 2; 1), A_2(2; -1; 8), A_3(2; -1; 2), A_4(6; -1; 6)$

102. $A_1(-1;3;2), A_2(-8;5;0), A_3(-3;7;-5), A_4(-4;1;3)$.
103. $A_1(2;0;-1)$, $A_2(-2;-11;5)$, $A_3(1;-4;-1)$, $A_4(-2;1;-4)$.
104. $A_1(4;-2;3)$, $A_2(10;-3;-2)$, $A_3(8;-6;3)$, $A_4(5;-6;0)$.
105. $A_1(2;-5;2)$, $A_2(-7;2;4)$, $A_3(6;-1;3)$, $A_4(0;1;5)$.
106. $A_1(0;1;1)$, $A_2(3;4;4)$, $A_3(-3;9;3)$, $A_4(0;5;4)$.
107. $A_1(-2;0;4)$, $A_2(3;-3;7)$, $A_3(-3;-5;11)$, $A_4(-2;-7;15)$.
108. $A_1(5;-1;3)$, $A_2(8;8;-3)$, $A_3(2;0;-2)$, $A_4(4;1;0)$.
109. $A_1(3;2;-2)$, $A_2(1;3;1)$, $A_3(6;2;0)$, $A_4(0;2;2)$.
110. $A_1(3;-2;3)$, $A_2(0;-6;-1)$, $A_3(5;-9;-8)$, $A_4(3;-8;-5)$.

Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости

Литература. [7], гл. IV.

Основные вопросы.

1. Общее уравнение прямой. Геометрический смысл коэффициентов уравнения. § 19.
2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. § 17.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. §§ 16,17.
4. Условие параллельности двух прямых. § 18.
5. Условие перпендикулярности двух прямых. § 18.
6. Угол между двумя прямыми. § 18.
7. Расстояние от точки до прямой. § 22.

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Даны три вершины $A(-3;-1), B(2;2), C(9;1)$ параллелограмма $ABCD$. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.
Решение. Напишем уравнение стороны AB.
Эта прямая проходит через точку $A(-3;-1)$ и имеет

направляющий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (5,3)$. Следовательно, уравнение стороны AB имеет вид: $\frac{x+3}{5} = \frac{y+1}{3}$.

Напишем уравнение стороны DC, параллельной AB. Для этого используем тот факт, что если прямые параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны. Следовательно, уравнение стороны DC, проходящей через точку $C(2;2)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (5,3)$ можно представить в виде $\frac{x-9}{5} = \frac{y-1}{3}$.

Напишем уравнение стороны BC.

Эта прямая проходит через точку $B(2;2)$ и имеет направляющий вектор $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = (7,-1)$. Следовательно, уравнение стороны BC. имеет вид: $\frac{x-2}{7} = \frac{y-2}{-1}$.

Напишем уравнение стороны AD. Поскольку AD параллельна BC, то их направляющие векторы коллинеарны. Следовательно, уравнение стороны AD, проходящей через точку $A(-3;-1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = (7;-1)$ можно представить в виде $\frac{x+3}{7} = \frac{y+1}{-1}$.

*Пример 2.*Даны две точки $A(-3;1)$, $B(9;5)$. На отрезке AB найти точку C, делящую этот отрезок пополам.

Решение. Пусть точки A, B, C имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, где тоска C является серединой отрезка AB, тогда можно написать, что $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, следовательно, в данном случае получаем:

$x_3 = \frac{-3+9}{2} = 3$, $y_3 = \frac{1+5}{2} = 3$. Серединой отрезка AB будет точка $C(3;3)$.

*Пример3.*Даны две точки $A(-3;1)$, $B(9;6)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $C(5;-2)$ перпендикулярно отрезку AB.

Решение. Вектор $\vec{N} = \overrightarrow{AB} = (12;5)$ будет нормальным вектором искомой прямой. Пусть $M(x;y)$ произвольная точка прямой, тогда вектор $\overrightarrow{CM} = (x-5; y+2)$ - это вектор лежащий на данной прямой, следовательно векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$ - ортогональны. Если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю, значит $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Если написать этот условие в координатах, то получим: $12\cdot(x-5)+5\cdot(y+2)=0$, или $12\cdot x+5\cdot y-50=0$.

Задачи для контрольных работ.

201 - 210. Даны вершины $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ треугольника. Найти: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины C; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

201. $A(5;1), B(1;3), C(-4;10)$.
202. $A(14;10), B(-2;-2), C(5;22)$.
203. $A(-13;3), B(-1;-3), C(2;2)$.
204. $A(22;-6), B(-2;4), C(-6;-2)$.
205. $A(12;4), B(-2;-2), C(-6;0)$.
206. $A(6;0), B(2;-6), C(-3;-9)$.
207. $A(15;9), B(-1;-3), C(6;21)$.

208. $A(-8;4), B(4;-2), C(7;2)$.
209. $A(10;-2), B(-4;4), C(-8;2)$.
210. $A(13;5), B(-1;-3), C(-5;1)$.

Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве

Литература. [7], гл. XII; [1], гл. 9.

Основные вопросы.

1. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл коэффициентов уравнения. [7], Гл. XII, § 63.
2. Условие параллельности двух плоскостей. [7], Гл. XII, § 68.
3. Условие перпендикулярности двух плоскостей. [7], Гл. XII, § 68.
4. Угол между двумя плоскостями. [1], Гл. 9, § 11.
5. Расстояние от точки до плоскости. [7], Гл. XII, § 68.
6. Канонические и параметрические уравнения прямой. [7], Гл. XII, § 67.
7. Условие параллельности двух прямых. [7], Гл. XII, § 68.
8. Условие перпендикулярности двух прямых. [7], Гл. XII, § 68.
9. Угол между двумя прямыми. [1], Гл. 9, § 12.
10. Условие параллельности прямой и плоскости. [7], Гл. XII, § 68.
11. Условие перпендикулярности прямой и плоскости. [7], Гл. XII, § 68.
12. Угол между прямой и плоскостью. [1], Гл. 9, § 13.

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(2;-1;3)$, $M_1(3;1;2)$ $M_2(4;2;1)$

Решение. Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно взять произвольную точку $M\left(x;y;z\right)$, лежащую на этой плоскости. Далее построим три вектора: вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-2\,;y+1;z-3)$; вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(1\,;2\,;\,-1)$; и вектор $\overrightarrow{M_0M_2}=(2\,;3\,;\,-2)$. Эти векторы компланарны, но если три вектора компланарны, то их смешанное произведение равно нулю. Напишем это условие в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0\,.$$

Вычислим получившийся определитель разложением этого определителя по первой строке, тогда получим:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot\left(x-2\right)-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\cdot\left(y+1\right)+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\cdot\left(z-3\right)=0$$

После вычисления трех определителей второго порядка получаем:

$$-1\cdot\left(x-2\right)-0\cdot\left(y+1\right)-1\cdot\left(z-3\right)=0,\text{ или }\; x-z+1=0$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;0)$, перпендикулярно прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z+1}{4}.$$

Решение. Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно знать точку M_0, лежащую на этой плоскости и нормальный вектор $\overline{N}$ к этой плоскости.. Точка $M_0(2;-1;0)$ лежит на этой плоскости, а по условию задачи направляющий вектор прямой: $\vec{a}=\left(3;-5;4\right)$ перпендикулярен искомой плоскости, следовательно, вектор $\vec{a}$ можно взять в качестве нормального

вектора искомой плоскости: $\overrightarrow{N}=\vec{a}=(3;-5;4)$. Пусть $M\,(x;y;z)$ произвольная точка искомой плоскости, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и вектор $\overrightarrow{N}$ - ортогональны. . Если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю, значит $\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{N}=0.$ Если написать этот условие в координатах, то получим:
$3\cdot(x-2)-5\cdot(y+1)+4\cdot z=0$, или $3\cdot x-5\cdot y+4z-11=0.$

Пример 3. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;0)$, перпендикулярно плоскости $2x+3y+z-1=0$.
Решение. Для того, чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно знать точку M_0, лежащую на этой прямой и направляющий вектор $\vec{a}$ этой прямой.. Точка $M_0(2;-1;0)$ лежит на этой прямой, и по условию задачи нормальный вектор плоскости $\overrightarrow{N}=(2;3;1)$ параллелен искомой прямой, следовательно, вектор $\overrightarrow{N}$ можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой $\vec{a}=\overrightarrow{N}=(2;3;1)$. Пусть $M\,(x;y;z)$ произвольная точка искомой прямой, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и вектор $\overrightarrow{N}$ - коллинеарны. . Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны , значит $\overrightarrow{M_0M}=\lambda\cdot\overrightarrow{N}$. Если написать этот условие в координатах, то получим канонические уравнения искомой прямой: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}$.

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$, параллельно плоскости $7\cdot x-3\cdot y+2z-8=0.$

Решение. Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно знать точку M_0, лежащую на этой плоскости и нормальный вектор $\overrightarrow{N}$ к этой плоскости.. Точка $M_0(2;-1;3)$ лежит на этой плоскости, а по условию задачи нормальный вектор плоскости $7\cdot x-3\cdot y+2z-8=0$, то есть вектор

$\overrightarrow{N}=(7;-3;2)$ перпендикулярен к искомой плоскости, следовательно, вектор $\overrightarrow{N}$ можно взять в качестве нормального вектора искомой плоскости: $\overrightarrow{N}=(7;-3;2)$. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка искомой плоскости, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и вектор $\overrightarrow{N}$ - ортогональны. . Если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю, значит $\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{N}=0$. Если написать этот условие в координатах, то получим: $7\cdot(x-2)-3\cdot(y+1)+2\cdot(z-3)=0$, или $7\cdot x-3\cdot y+2z-23=0$.

Пример 5. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-2;3)$, параллельно отрезку AB, где $A(2;5;-3)$ и $B(3;-1;1)$,

Решение. Для того, чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно знать точку M_0, лежащую на этой прямой и направляющий вектор $\vec{a}$ этой прямой.. Точка $M_0(2;-2;3)$ лежит на этой прямой, и по условию задачи вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(1;-6;4)$ параллелен искомой прямой, следовательно, вектор $\vec{a}$ можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой $\vec{a}=(1;-6;4)$. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка искомой прямой, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и вектор $\vec{a}$ - коллинеарны. . Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны , значит $\overrightarrow{M_0M}=\lambda\cdot\vec{a}$. Если написать этот условие в координатах, то получим канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-3}{4}$.

Пример 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Решение. В условии задачи даны канонические уравнения прямой. Перейдем к параметрическим уравнениям этой прямой.

Введем параметр t: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t$ и выразим x, y, z через t: $\frac{x-1}{1}=t \Rightarrow x=t+1$, $\frac{y+1}{-2}=t \Rightarrow y=-2t-1$, $\frac{z}{6}=t \Rightarrow z=6t$. Уравнения $x=t+1, y=-2t-1, z=6t$ являются параметрическими уравнениями прямой. Для того, чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, нужно решить систему уравнений, состоящую из параметрических уравнений прямой и уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t-1 \\ z=6t \\ 2x+3y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t-1 \\ z=6t \\ 2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t-1 \\ z=6t \\ 2t-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t-1 \\ z=6t \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=6 \\ t=1 \end{cases}$$

Точка $(2; -3; 6)$ является пересечением прямой и плоскости.

Задачи для контрольных работ.

301 - 310. Даны вершины $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$ пирамиды. Найти: 1) уравнение плоскости, проходящей через вершины A_1, A_2, A_3; 2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1\ A_2\ A_3$; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины A_4 на

грань $A_1\ A_2\ A_3$; 4) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_4 параллельно грани $A_1\ A_2\ A_3$; 5) уравнение прямой, проходящей через вершину A_2 параллельно ребру A_1A_4.

301. $A_1(3;2;1),\quad A_2(2;-1;8),\quad A_3(2;-1;2),\quad A_4(6;-1;6).$
302. $A_1(-1;3;2),\quad A_2(-8;5;0),\quad A_3(-3;7;-5),\quad A_4(-4;1;3).$
303. $A_1(2;0;-1),\quad A_2(-2;-11;5),\quad A_3(1;-4;-1),\quad A_4(-2;1;-4).$
304. $A_1(4;-2;3),\quad A_2(10;-3;-2),\quad A_3(8;-6;3),\quad A_4(5;-6;0).$
305. $A_1(2;-5;2),\quad A_2(-7;2;4),\quad A_3(6;-1;3),\quad A_4(0;1;5).$
306. $A_1(0;1;1),\quad A_2(3;4;4),\quad A_3(-3;9;3),\quad A_4(0;5;4).$
307. $A_1(-2;0;4),\quad A_2(3;-3;7),\quad A_3(-3;-5;11),\quad A_4(-2;-7;15).$
308. $A_1(5;-1;3),\quad A_2(8;8;-3),\quad A_3(2;0;-2),\quad A_4(4;1;0).$
309. $A_1(3;2;-2),\quad A_2(1;3;1),\quad A_3(6;2;0),\quad A_4(0;2;2).$
310. $A_1(3;-2;3),\quad A_2(0;-6;-1),\quad A_3(5;-9;-8),\quad A_4(3;-8;-5).$

Тема 4. Введение в анализ

Литература. [1], Гл. 2, 4; [2], Гл. I, II; [3], Гл. 2, 3.

Основные вопросы.

1. Числовые последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Основные свойства бесконечно малых последовательностей. [1], Гл. 2, § 1; [2], Гл. I, §§ 3 - 5, Гл. II, § 1; [3], Гл. 2, §§ 2.1, 2.3.
2. Предел последовательности, основные свойства пределов. [1], Гл. 2, § 2; [3], Гл. 2, §§ 2.1, 2.2.
3. Монотонные последовательности, признак сходимости монотонных последовательностей. Число e. [1], Гл. 2, § 3; [2], Гл. I, § 5, Гл. II, § 7; [3], Гл. 2, §§ 2.5, 2.6.
4. Предел функции, теоремы о пределах функций. [1], Гл. 4, §§ 1-3; [2], Гл. II, §§ 2-5; [3], Гл. 3, §§ 3.1, 3.2.

5. Первый и второй замечательные пределы. [1], Гл. 4, § 4; [2] Гл. II, §§ 6, 7; [3], Гл. 3, § 3.9.
6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. [1], Гл. 4, §§ 5, 6; [2], Гл. II, § 11; [3], Гл. 3, § 3.10.
7. Понятие непрерывности функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность некоторых элементарных функций. Непрерывность сложной и обратной функций. [1], Гл. 4, §§ 7, 8, 11, 12; [2], Гл. II, § 9; [3], Гл. 3, §§ 3.3, 3.6, 3.8.
8. Основные свойства непрерывных на отрезке функций. Теорема о прохождении функции через любое промежуточное значение, теорема об ограниченности непрерывной функции, теорема о достижении непрерывной функцией своих наибольшего и наименьшего значений на отрезке. [1], Гл. 4, § 10; [2], Гл. II, § 10; [3], Гл. 3, § 3.5.
9. Классификация точек разрыва функции. [1], Гл. 4, § 9; [3], Гл. 3, § 3.4.

Важнейшими понятиями этой темы являются понятия предела последовательности, предела функции, непрерывности функции.

Рассмотрим решения некоторых задач на вычисление пределов (не используя правило Лопиталя) при этом при вычислении пределов будем руководствоваться правилами:

1.Если нужно вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$, где a является константой, причём $a\neq 0$, то следует сделать замену $x=a+t$, где $t\to 0$ и перейти к вычислению предела $\lim\limits_{t\to 0} f\left(a+t\right)$.

2. Если в функцию $f\left(x\right)$, стоящую под знаком предела, входит сумма $u+v$ и эта сумма не возводится в растущую степень, то эту сумму можно заменить на главное слагаемое, при этом слагаемое u является главным, если $\frac{v}{u}\to 0$, при $x\to a$.

3. Под знаком предела при $\alpha \to 0$ можно выполнять замены:

$$\sin\alpha \sim \alpha,\ tg\alpha \sim \alpha, \arcsin\alpha \sim \alpha, arctg\alpha \sim \alpha, \cos\alpha \sim 1-\frac{\alpha^2}{2},$$

$$e^{\alpha} \sim 1+\alpha, \ln(1+\alpha) \sim \alpha, (1+\alpha)^r \sim 1+r\alpha$$

где $r \in R$. При выполнении замен нельзя получать точный ноль.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+x}+\sqrt[3]{27x^6+2}}{3x^2-x+2}$.

Решение. В этом примере ни числитель, ни знаменатель не имеют предела, поскольку они являются бесконечно большими последовательностями, в таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, сделаем следующие преобразования:

в соответствии с пунктом 2 вышеуказанной схемы заменим каждую сумму на главное слагаемое, а при $x \to \infty$ слагаемое будет главным, если его степень больше. Тогда получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+x}+\sqrt[3]{27x^6+2}}{3x^2-x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x^2}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}$ является элементарной, но точка $x_0=-4$ не принадлежит области определения, так как числитель и знаменатель обращаются в нуль при $x=-4$, в таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, сделаем следующие преобразования:

в соответствии с пунктом 1 вышеуказанной схемы сделаем замену

$x=-4+t$, $t\to 0$ и проделаем простейшие преобразования, получим $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{5-4+t}-\sqrt{9+2(-4+t)}}{3(-4+t)^2+10(-4+t)-8}=$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{48-24t+3t^2-40+10t-8}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{-14t+3t^2}$$

Для вычисления получившегося предела в соответствии с пунктом 3 вышеуказанной схемы сделаем замену: $\sqrt{1+t}\sim 1+\frac{1}{2}t$; $\sqrt{1+2t}\sim 1+t$;

в соответствии с пунктом 2 вышеуказанной схемы заменим сумму $3t^2-14t$ на главное слагаемое, а при $t\to 0$ слагаемое будет главным, если его степень меньше, то есть $3t^2-14t\sim -14t$

. Тогда получаем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{-14t+3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}t-1-t}{-14t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t}{-14t}=\frac{1}{28}$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x\sin x}-1}{1-\cos 4x}$.

Решение. Функция $\frac{e^{3x\sin x}-1}{1-\cos 4x}$ является элементарной, но в точке $x_0=0$ она не определена, поскольку числитель и знаменатель обращаются в нуль при $x=0$, т.е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Найдем предел этой функции в соответствии с пунктом 3 вышеуказанной схемы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x\sin x}-1}{1-\cos 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{\frac{(4x)^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x^2}{16x^2} = \frac{3}{8}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{4}}$.

Решение. Данный предел имеет неопределенность вида $\left\{1^{\infty}\right\}$. Для его вычисления воспользуемся логарифмическими формулами и получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{4}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{4}\ln\frac{3x-1}{3x+2}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{4}\ln\frac{3x-1}{3x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4}\left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4}\cdot\frac{-3}{3x+2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4}\cdot\frac{-3}{3x}} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. Числитель и знаменатель данной функции стремятся к нулю при $x\to\frac{\pi}{4}$, т. е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Сделаем замену переменных в данной функции. Обозначим $x=\frac{\pi}{4}+t$, где $t\to 0$ тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)}{\sin(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin 2t}{\sin t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-2t}{t} = -2$$

.

Задачи для контрольных работ.

401 - 410. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

401. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)^2-(1-2x)^2}{3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x+3}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{5x+1}$.

402. а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{3x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 3} (7-2x)^{\frac{2}{3-x}}$.

403. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2-7x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{3x}}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{5-x}-1}{x-4}$.

404. **а)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-7x+2}{\sqrt{x+2}-2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{5x+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^4-3x^2+2}{7x+3x^4}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin \frac{x}{2}}{1-\cos 3x}$.

405. **а)** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}} \dfrac{4x^2+3x-1}{\sqrt{4x}-1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^4+x}-x}{\sqrt{2x^4+x^3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\, tg\, 5x}{\sin^2 2x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 1} (5x-4)^{\frac{3}{x^2-1}}$.

406. **а)** $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x^2+2)^2+3x^4}{x^4-2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4-x}-1}{2x^2-5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{4x}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{\frac{5}{x-2}}$.

407. **а)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2+x}-1}{3x^2+5x+2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\, 2x}{4x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{5}{x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sin(x-1)}$.

408. **а)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, 2x\cdot \sin 2x}{2x^2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to -1} (3x+4)^{\frac{2}{(x+1)^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-3x^2+2x^3}{(1+x)^3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{7x-10-x^2}{\sqrt{6-x}-1}$.

409. **а)** $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2-25}{2x^2+9x-5}$; **б)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{e^{x+3}-e}{x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} (1-2\sin x)^{\frac{3}{2x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\cdot \arcsin 2x}$.

410. **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-2x^2+x^3}{4+x^2-2x^3}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-1}{1-\sqrt{6-x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin 3x\right)^{\frac{x+2}{x}}$.

Тема 5. Производная и ее приложения

Литература. [2], т.1.

Основные вопросы.

1. Определение производной (физический и геометрический смысл). Гл. III, §§ 1 - 4.
2. Таблицы основных формул дифференцирования. Гл. III § 15.
3. Дифференциал. Гл. III §§ 20 - 21.
4. Вторая производная. Механический смысл. Гл. III § 22, § 25.
5. Касательная к графику функции; уравнение касательной. Гл. III § 26, § 3.
6. Теорема Ролля. Гл. IV § 1.
7. Теорема Лагранжа. Гл. IV § 2.
8. Теорема Коши. Гл. IV § 3.
9. Правило Лопиталя. Гл. IV §§ 4 - 5.
10. Формула Тейлора. Гл. IV §§ 6 - 7.
11. Исследование функции на возрастание и убывание. Гл. V § 2, Гл. I § 6.
12. Экстремумы функции. Гл. V §§ 3 - 5.
13. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Гл. V §§ 7 - 8.
14. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Гл. V § 9.
15. Асимптоты. Гл. V § 10
16. Построение графиков функции. Гл. V § 11.

Рассмотрим решение типичных задач по данной теме.

Пример 1. Найти производные функций указанного порядка.

а) $y = 3\mathrm{ctg}x + \dfrac{e^x}{1-x}$, $y' = ?$

б) $y = \sin^3 x$, $y' = ?$, $y'' = ?$

Решение.

а) Применим правило дифференцирования суммы

$(u+v)' = u' + v'$, тогда

$$y' = \left(3\mathrm{ctg}x + \frac{e^x}{1-x}\right)' = (3\mathrm{ctg}x)' + \left(\frac{e^x}{1-x}\right)'.$$ При

дифференцировании первого слагаемого используем формулу:

$(c f(x))' = c(f(x))'$, где c - константа. Получим

$$(3\mathrm{ctg}x)' = 3(\mathrm{ctg}x)' = 3\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{3}{\sin^2 x}.$$ Для второго

слагаемого применим формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. Получим

$$\left(\frac{e^x}{1-x}\right)' = \frac{(e^x)'(1-x) - (1-x)'e^x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{e^x(1-x) - (-1)e^x}{(1-x)^2} = \frac{e^x(1-x+1)}{(1-x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}.$$ Итак, в

ответе получим:

$$\left(3\mathrm{ctg}x + \frac{e^x}{1-x}\right)' = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} - \frac{3}{\sin^2 x}.$$

б) Замечая, что $y = \sin^3 x$ является сложной функцией $y = u^3$, где $u = \sin x$, применим правило дифференцирования сложной функции: $\left(y(u(x))\right)_x' = y_u' \cdot u_x'$. Получим:

$y_x' = \left(u^3\right)_u' \cdot u_x' = 3u^2 \cdot (\sin x)_x' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$. Итак, в ответе получим $y' = 3\sin^2 x \cos x$. Найдем y''. Так как

$y'' = (y')'$, то $y'' = \left(3\sin^2 x \cos x\right)' = 3\left(\sin^2 x \cdot \cos x\right)'$.
Применим формулу для вычисления производной произведения:
$(u \cdot v)' = u'v + v'u$, полагая $u = \sin^2 x$, а $v = \cos x$ получим:
$\left(\sin^2 x \cdot \cos x\right)' = \left(\sin^2 x\right)' \cos x + (\cos x)' \sin^2 x$. Как и выше заметим, что функция $y = \sin^2 x$ сложная - $y = u^2$, $u = \sin x$, поэтому $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cos x = = \sin 2x$, а так как

$(\cos x)' = -\sin x$, имеем $\left(\sin^2 x \cos x\right)' = \sin 2x \cos x +$
$+ \sin^2 x \cdot (-\sin x) = \sin 2x \cos x - \sin^3 x$. Итак, в ответе получаем

$$\left(\sin^3 x\right)'' = 3\left(\sin 2x \cos x - \sin^3 x\right)$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = (\cos x)^{\sin x}$.
Решение. Найдем сначала y', так как $dy = y'dx$. Применим метод логарифмического дифференцирования, а именно: по правилу дифференцирования сложной функции $\ln y(x)$ имеем:

$\left(\ln y(x)\right)' = \dfrac{y'}{y}$ или $y' = y \cdot \left(\ln(y(x))\right)'$. Значит для данной функции:

$$y' = (\cos x)^{\sin x}\left(\ln(\cos x)^{\sin x}\right)' = (\cos x)^{\sin x}(\sin x \cdot \ln\cos x)' =$$

$$= (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln\cos x + \sin x \frac{-\sin x}{\cos x}\right) =$$

$(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln\cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$. Итак, в ответе получим

$$dy = d\left((\cos x)^{\sin x}\right) = \left((\cos x)^{\sin x}\right)' dx = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) dx$$

Пример 3. Вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя (см. I гл. IV §§ 4 - 5).

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$; г) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение.

а) Предел и числителя, и знаменателя равны 0, значит имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. По правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(\sin^2 x)'} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x \to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, то имеем неопределенность вида $\infty \cdot 0$, так как $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, то можно преобразовать ее к виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, а затем применить правило Лопиталя. Так получаем:

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x - 1} = \infty$

$\left(\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1\right.$ и $\left.\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x - 1\right) = 1 - 1 = 0\right)$, то имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Сведем ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, приводя дроби к общему знаменателю. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x\left(e^x - 1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - 1 - x\right)'}{\left(x\left(e^x - 1\right)\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{1\cdot\left(e^x - 1\right) + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$$, так как и здесь пределы числителя и знаменателя равны нулю, то опять имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применив правило Лопиталя получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - 1\right)'}{\left(e^x - 1 + xe^x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\left(2 + x\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}$, так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x = 1$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}x = \infty$, то имеем неопределенность вида 1^∞. Используя основное логарифмическое тождество, получим

$\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x} = e^{\ln\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}} = e^{\mathrm{tg}x\ln\sin x}$, значит

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{tg}x\ln\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}x\ln\sin x}$$. Найдем предел показателя: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}x\ln\sin x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\ln\sin x}{\cos x}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos x} = 1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos x}$$,т.к.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x = \ln 1 = 0$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, то имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ и, применяя правило Лопиталя, получим $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\ln\sin x)'}{(\cos x)'} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x} = \dfrac{\frac{0}{1}}{-1} = 0$. Значит, в ответе имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x} = e^0 = 1$.

Пример 4. Провести полное исследование функции и построить график этой функции

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$

Исследуем функцию согласно схеме:

1. Исследовать функцию алгебраическими методами: найти область определения функции исследовать функцию на четность и нечетность, исследовать функцию на периодичность.
2. Исследовать функцию с помощью пределов: найти точки разрыва функции и асимптоты графика функции.
3. Исследовать функцию по первой производной: найти интервалы монотонности и точки экстремума функции.

4. Исследовать функцию по второй производной: исследовать график функции на выпуклость и вогнутость и найти точки перегиба.
5. Если понадобится, то провести дополнительное исследование функции с помощью всех вышеперечисленных методов, например, найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции, найти угол наклона касательной к графику функции в некоторой точке, лежащей на графике этой функции, в частности в точке перегиба, если такая точка имеется на графике и т.д..

6. Построить график функции.

Решение.

1. Область определения функции $D_f = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.
2. Не периодична.
3. Так как $f(-x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, то $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, следовательно функция не является ни четной ни нечетной.
4. Точки пересечения графика с осями:

а) с $0x$: y=0, т.е. $\dfrac{x^2}{1+x} = 0$, x=0.

б) с $0y$: x=0, т.е. $y = \dfrac{0}{1-0}$ =0.

График пересекает оси в начале координат. Найдем интервалы знакопостоянства функции (т.е. интервалы, где она положительна и интервалы, где она отрицательна). $f(x) > 0$, при $\dfrac{x^2}{1-x} > 0$, т.е. при $1-x > 0$, $x < 1$. Итак, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty;1)$; $f(x) < 0$ при $x \in (1;+\infty)$.

5. Точка разрыва: x=1.

Асимптоты: x=1 - вертикальная асимптота, так как

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x}=\infty$. Найдем уравнение наклонной асимптоты:

$y=kx+b$. k=-1, т.к. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(1-x)x}=-1$, и

b=-1, т.к. $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x}=-1.$$

Таким образом, $y=-x-1$ - наклонная асимптота графика.

6. $f'(x)=\frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$,

$f'(x)=0$ при x=0 и x=2 и не существует при x=1.

Итак, критические точки функции x=0, x=2, x=1. Изучим поведение функции в окрестности каждой критической точки. Результаты сведены в таблице.

Таблица.

X	$-\infty<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x<+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	не существует	+	0	–
$f(x)$	убывает	0 min	возрастает	не существует	возрастает	–4 max	убывает

В точке x=1 функция не имеет экстремума, так как она в ней не определена.

7. Исследуем функцию на выпуклость.

$$f''(x)=\frac{(2-2x)(1-x)^2+2(2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4}=$$

$$\frac{2-2x-2x+2x^2+4x-2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

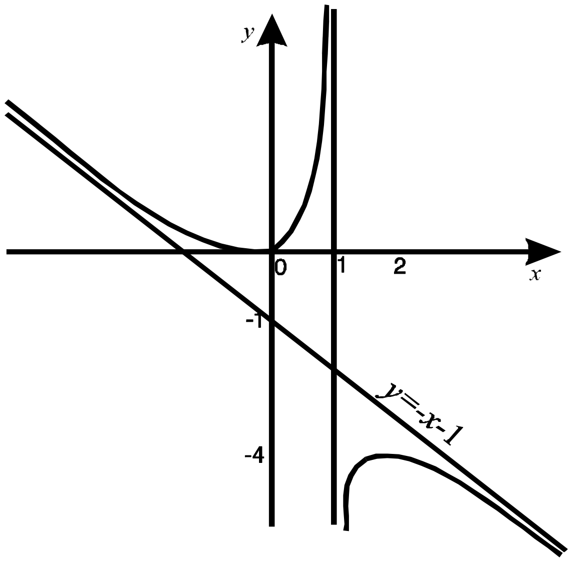
$f''(x)>0$ при $(1-x)^3>0$, т.е. при 1-x>0 или x<1. $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;1)$ и на этом промежутке график имеет выпуклость вниз, а при $x\in(1;+\infty)$ - выпуклость вверх. Отметим это в таблице.

Таблица

X	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	+	не определена	–
$f(x)$	выпуклость вниз		выпуклость вверх

График функции не имеет точек перегиба.

8. На основании проведенного исследования строим график функции, рис. 6.



Задачи для контрольных работ

501-510. Для заданных функций найти

а) первую производную y' и вторую производную y'';

б), в) первую производную y';

г) дифференциал *dy*.

501) а) $y = 3x^4 - \dfrac{5}{3x^3} - 1$; б) $y = \left(x^2 - 1\right)\ln 2x$;

в) $y = \dfrac{\cos x^2}{\sin 3x}$; г) $y = e^{\sin 5x}$

502) а) $y = 2x^5 - \dfrac{1}{3x^3} + 5$; б) $y = \left(x^3 + x - 1\right)\sin 4x$;

в) $y = \dfrac{2^x}{\sin^2 x}$; г) $y = \sin^4 x$.

503) а) $y = 4x^2 - \frac{5}{3x^6} + 1$; б) $y = \left(2x^2 - 7x\right) \cdot 10^{(1-x)}$;

в) $y = \frac{x}{\sin^2 x}$; г) $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

504) а) $y = 3 - \frac{x^5}{6} + \frac{6}{x^5}$; б) $y = 3^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} 7x$;

в) $y = \frac{\sin x^2}{x^3 - 1}$; г) $y = \sin^3 3x$.

505) а) $y = 2x^2 + \frac{3}{x^2} + 5$; б) $y = \left(1 - x^3\right) \operatorname{arctg} 6x$;

в) $y = \frac{\sin(1-x)}{x^2 + 6}$; г) $y = tg^3 \left(2x - 3\right)$.

506) а) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x^4} + 5$; б) $y = \left(1 + \operatorname{arctg} 3x\right) e^x$;

в) $y = \frac{\cos\,(1 - 3x)}{x^2}$; г) $y = 6^{\sqrt{x}}$.

507) а) $y = \frac{x^7}{5} + \frac{3}{x^3} + 1$; б) $y = \left(1 - 2x + x^2\right) \operatorname{tg} 6x$;

в) $y = \frac{\sin\,(2 - x)}{e^{3x}}$; г). $y = c\operatorname{tg}^2 2x$

508) а) $y = 1 - \frac{2}{x^6} - \frac{(x+1)^2}{3}$; б) $y = \sqrt{x} \cdot \arccos\left(1 - x^2\right)$;

в) $y=\dfrac{3+2x}{\sin^4 x}$; г) $y=\cos^3 7x$.

509) а) $y=\dfrac{5x^3}{3}+\dfrac{6}{x}-1$; б) $y=e^{\sqrt{x}}\left(1-\operatorname{arctg} 8x\right)$;

в) $y=\dfrac{4-5x}{\cos^2 3x}$; г) $y=\ln^3 \sin x$.

510) а) $y=1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2x}$; б) $y=\left(\ln\left(3x^2-1\right)\right)\cdot\sin 2x$;

в) $y=\dfrac{2-\sin x}{\sin e^x}$; г) $y=3^{arc\operatorname{ctg} x}$.

511-520. Найти пределы с помощью правила Лопиталя.

511) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 3x}$; 512) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$; 513) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$;

514) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$; 515) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; 516) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$;

517) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{tg^2 x}$; 518) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^4 x}{x^9}$;519) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$;

520) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$.

521-530. Провести полное исследование данной функции и построить ее график

521) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; 522) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; 523) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$

524) $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$ 525) $y=\dfrac{2x^2-3}{x^2}$; 526) $y=\dfrac{x^2-3}{x}$;

527) $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$; 528) $y=\dfrac{x^2-2}{x}$; 529) $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$;

530) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

Тема 6. Неопределенный интеграл

Литература. [1], Гл.7, [2], Гл. X, [3], Гл. 5.

Основные вопросы.

1. Понятие первообразной. Неопределенный интеграл и его свойства [1] Гл. 7, §§1,2; [2], Гл. X, §1, §3; [3], Гл. 5, §5.1.
2. Таблицы основных интегралов. [1], Гл. 7, §3; [2], Гл. X, §2; [3], Гл. 5, §5.1.
3. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменных, интегрирование по частям. [1], Гл. 7, §4; [2], Гл. X, §§4,6; [3], Гл. 5, § 5.1.
4. Интегрирование функций вида $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ и $\dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. [2], Гл. X, §5; [3], Гл. 5, §5.2.
5. Интегрирование рациональных функций. [1], Гл. 7, §5; [2], Гл. X, §§ 7 - 9; [3], Гл. 5, § 5.6.
6. Интегрирование иррациональных функций вида $R\left(x,\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ldots\right)$. [1], Гл. 7, §6; [2], Гл. X, §10; [3], Гл. 5, §5.7.
7. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin x,\cos x)$. [1] Гл. 7, §6; [2], Гл. X, §12; [3] Гл. 5, §5.7.

Важным понятием этой темы является понятие первообразной. Первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке называется функция $F(x)$, удовлетворяющая на этом промежутке соотношению

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на некотором промежутке называется множество всех первообразных для этой функции. Известно, что все первообразные для одной и той же функции на некотором промежутке отличаются друг от друга на постоянную величину. поэтому неопределенный интеграл от функции $f(x)$ равен

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Из этих определений следует, что отыскание неопределенного интеграла является операцией, обратной операции дифференцирования. Поэтому перед изучением этой темы рекомендуется повторить свойства и формулы дифференцирования основных элементарных функций, а также следует выучить таблицу основных интегралов и свойства неопределенных интегралов. Отыскание неопределенного интеграла сводится к приведению его путем последовательных преобразований к табличным интегралам. При этом используются основные методы интегрирования: разложение интегралов на сумму интегралов, замена переменных или подстановка, интегрирование по частям.

Пример 1. Найти $\int \frac{x\sin x + \sqrt[3]{x^2} - 2}{x} dx$.

Решение. $\int \frac{x\sin x + \sqrt[3]{x^2} - 2}{x} dx \overset{1)}{=} \int \left(\sin x + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} - \frac{2}{x} \right) dx \overset{2)}{=}$

$$=\int \sin x dx+\int x^{\frac{2}{3}-1}dx-\int \frac{2}{x}dx \overset{3)}{=} \int \sin x\, dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx-2\int \frac{dx}{x} \overset{4)}{=}$$

$$-\cos x+\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}-2\ln|x|+C==-\cos x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\ln|x|+C.$$

Пояснения к решению

1) Поделив почленно числитель на знаменатель представили подынтегральную функцию в виде суммы более простых функций.
2) Применили свойство неопределенного интеграла: интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции.
3) В третьем интеграле $\int \frac{2}{x}dx$ вынесли постоянный множитель за знак интеграла.
4) Использовали таблицу основных интегралов.

Пример 2. Найти $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2+\sin 3x}}$.

Решение. В этом интеграле надо сделать замену переменных

$$\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2+\sin 3x}} \overset{1)}{=} \left\| \begin{array}{l} d(2+\sin 3x)=\cos 3x\cdot 3dx \\ 2+\sin 3x=t \\ dt=3\cos 3x\, dx \\ \cos 3x\, dx=\frac{1}{3}dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{\sqrt{t}} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C\overset{2)}{=}\frac{2}{3}\sqrt{2+\sin 3x}+C.$$

Пояснения к решению

1) Делаем замену переменных $2+\sin 3x=t$. В прямых скобках в первой строке показано, почему делается именно такая замена. В остальных строках приведены вспомогательные выкладки.
2) Снова делаем замену переменных, возвращаясь к прежней переменной x.

Пример 3. Найти $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{4+9x^8}}$.

Решение. В этом интеграле тоже надо сделать замену переменных

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{4+9x^8}}=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2^2+\left(3x^4\right)^2}}=\left\|\begin{array}{l} d\left(3x^4\right)=12x^3dx \\ 3x^4=t \\ dt=12x^3dx \\ x^3dx=\frac{1}{12}dt \end{array}\right\|=\int\frac{\frac{1}{12}dt}{\sqrt{2^2+t^2}}$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{\sqrt{2^2+t^2}}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln\left|t+\sqrt{2^2+t^2}\right|+C=\frac{1}{12}\ln\left|3x^4+\sqrt{4+9x^8}\right|+C.$$

Пример 4. Найти $\int\frac{(4x-3)dx}{2x^2-2x+1}$.

Решение.

$$\int \frac{(4x-3)dx}{2x^2-2x+1} = \left\| \begin{array}{l} \left(2x^2-2x+1\right)' = 4x-2 \\ 4x-2 = 4t \\ x-\frac{1}{2} = t \\ x = t+\frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array} \right\| =$$

$$\int \frac{\left(4\left(t+\frac{1}{2}\right)-3\right)dt}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(t+\frac{1}{2}\right)+1} =$$

$$= \int \frac{(4t+2-3)dt}{2\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)-2t-1+1} = \int \frac{(4t-1)dt}{2t^2+2t+\frac{1}{2}-2t} =$$

$$\int \frac{4t-1}{2t^2+\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{4t-1}{t^2+\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{4tdt}{t^2+\frac{1}{4}} - \int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}}\right) =$$

$$2\int \frac{tdt}{t^2+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left\| \begin{array}{l} d\left(t^2+\frac{1}{4}\right) = 2t\,dt \\ t^2+\frac{1}{4} = z \\ dz = 2t\,dt \\ t\,dt = \frac{1}{2}dz \end{array} \right\| =$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z}-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{2}}=\int\frac{dz}{z}-\operatorname{arctg}2t=\ln|z|-\operatorname{arctg}2t+C$$

$$=\ln\left|t^2+\frac{1}{4}\right|-\operatorname{arctg}2t+C=$$

$$=\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)-\operatorname{arctg}2\left(x-\frac{1}{2}\right)+C=$$

$$\ln\left(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$=\ln\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$\ln\frac{2x^2-2x+1}{2}-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$=\ln\left(2x^2-2x+1\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C-\ln 2=$$

$$\ln\left(2x^2-2x+1\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C_1.$$

Заметим, что аналогичным способом можно находить как интеграл вида $\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$, так и интеграл вида $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, в котором также производную функции $\left(ax^2+bx+c\right)$ обозначают через *kt*, где в качестве *k* можно брать любую константу.

Пример 5. Найти $\int x^2e^{-x}dx$.

Решение. В этом случае необходимо применить формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 e^{-x} dx \overset{1)}{=}$$

$$\left\| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = \left\| \begin{matrix} -x = t \\ dt = -dx \end{matrix} \right\| = \int e^t(-dt) = -e^t = -e^{-x} \end{matrix} \right\| =$$

$$= x^2 \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int \left(-e^{-x}\right) \cdot 2xdx =$$

$$-x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx \overset{2)}{=} \left\| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{matrix} \right\| =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\Big(x\left(-e^{-x}\right) - \int \left(-e^{-x}\right)dx\Big) =$$

$$-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C.$$

Пояснения к решению

1) Применили формулу интегрирования по частям. Это дало возможность понизить показатель степени степенной функции.
2) Еще раз применили формулу интегрирования по частям.

Пример 6. Найти $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = \mathrm{arctg}\,2x & du = \dfrac{2}{1+(2x)^2}\,dx \\ dv = x\,dx & v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\| =$$

$$\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1+(2x)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x - \int \frac{x^2}{1+4x^2}dx =$$

$$\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}\int \frac{(4x^2+1)-1}{4x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x -$$

$$-\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{4x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}\left(\int dx - \int\frac{dx}{1+4x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}\int dx + +\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+(2x)^2} = \left\| \begin{matrix} 2x = t \\ dt = 2dx \\ dx = \dfrac{1}{2}dt \end{matrix} \right\|$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int\frac{\frac{1}{2}dt}{1+t^2} = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x - \frac{1}{4}x +$$

$$+\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\mathrm{arctg}\,2x + C =$$

$$\frac{4x^2+1}{8}\,\mathrm{arctg}\,2x - \frac{x}{4} + C.$$

Пример 7. Найти $\int \frac{x^4+2x^2-2x+4}{x^4+2x^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является дробно-рациональной. Прежде всего следует отметить, что эта рациональная дробь неправильная, так как степень числителя равна степени знаменателя. Выделим целую часть путем деления числителя на знаменатель. Это можно сделать либо делением уголком многочлена на многочлен, либо следующим образом:

$\dfrac{\left(x^4+2x^2\right)-2x+4}{x^4+2x^2}=1+\dfrac{-2x+4}{x^4+2x^2}$. Второе слагаемое является правильной дробью. Разложим знаменатель на простейшие множители: $\dfrac{-2x+4}{x^4+2x^2}=\dfrac{-2x+4}{x^2\left(x^2+2\right)}$. Разложим правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$\dfrac{-2x+4}{x^2\left(x^2+2\right)}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}$. Найдем коэффициенты A, B, C и D методом неопределенных коэффициентов. Приведем правую часть к общему знаменателю:

$\dfrac{-2x+4}{x^2\left(x^2+2\right)}=\dfrac{A\left(x^2+2\right)+Bx\left(x^2+2\right)+\left(Cx+D\right)x^2}{x^2\left(x^2+2\right)}$. Поскольку у дробей равны знаменатели, то будут равны их числители:

$-2x+4=Ax^2+2A+Bx^3+2Bx+Cx^3+Dx^2$.

Два многочлена тождественно равны лишь при условии равенства коэффициентов при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{l} x^3: \\ x^2: \\ x\ : \\ x^0: \end{array}\begin{cases} B+C=0 \\ A+D=0 \\ 2B=-2 \\ 2A=4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=-2 \end{cases}.$$

Итак, получаем $\frac{-2x+4}{x^2\left(x^2+2\right)}=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x^2+2}$. Вернемся к данному интегралу

$$\int\frac{x^4+2x^2-2x+4}{x^4+2x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x^2+2}\right)dx=$$

$$\int dx-2\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x-2}{x^2+2}dx=$$

$$=x-2\int x^{-2}dx-\ln|x|+\int\left(\frac{x}{x^2+2}-\frac{2}{x^2+2}\right)dx=$$

$$x+2x^{-1}-\ln|x|+\int\frac{x\,dx}{x^2+2}-2\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}x^2+2=t\\ dt=2x\,dx\\ x\,dx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right\|=x+\frac{2}{x}-\ln|x|+\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}-2\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$x+\frac{2}{x}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+$$

$$+C=x+\frac{2}{x}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Задачи для контрольных работ.

601-610. Найти неопределенные интегралы:

601) а) $\int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$; в) $\int x\cos 3x\,dx$; г) $\int\frac{(x+6)\,dx}{x^3-4x}$; д) $\int\sin^3 x\,dx$.

602) а) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$; в) $\int x^3 \ln x\,dx$; г) $\int \frac{2dx}{x^2+2x}$;д). $\int \cos^3 x dx$.

603) а) $\int \frac{(1+ctgx)\,dx}{\sin^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$; в) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{x^3+2x^2}$;д) $\int \sin^2 3x\,dx$.

604) а) $\int \frac{x\,dx}{2+3x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4}$; в) $\int x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$; г) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-2x}$; д) $\int \sin^2 2xdx$.

605) а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^6}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; в) $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$; г) $\int \frac{8}{x^3-4x}dx$; д) $\int \frac{2+3\cos^2 xdx}{\cos^2 x}$.

606) а) $\int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$; в) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$;г) $\int \frac{6}{x^2-9x}dx$; д) $\int \frac{(\cos^2 x-2)dx}{3\sin^2 x}$.

607) а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; в) $\int \frac{\ln x}{x^4}dx$;г) $\int \frac{dx}{x^3+2x^2}$;д) $\int \cos 3x \sin 4x\,dx$.

608) а) $\int \frac{\left(1-tg^2 x\right) dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-7}}$; в) $\int x \sin 4x dx$;г) $\int \frac{dx}{x^3+4x^2+3x}$; д). $\int \cos 3x \cos 4x dx$

609) а) $\int \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$;   в) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$; г) $\int \frac{(4-2x) dx}{x^2+4x}$; д). $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$

610) а) $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-4x^4}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$;   в) $\int \frac{\ln 2x}{x^3} dx$; г) $\int \frac{dx}{x^3-x}$;
д). $\int tg^3 x dx$

Тема 7. Определенный интеграл

Литература. [1], Гл. 8; [2], Гл. XI, XII; [3], Гл. 6,7.
Основные вопросы.

1. Определение определенного интервала и условия его существования. [1], Гл.8, §§ 1-3; [2], Гл. XI, §§ 1, 2; [3], Гл. 6, §§ 6.1; 6.6.
2. Основные свойства определенного интеграла. [1], Гл. 8, §§ 4, 5; [2], Гл. XI, §3; [3], Гл. 6, §§ 6.2, 6.4.
3. Интеграл с переменным верхним пределом. [1], Гл. 8, § 6; [2], Гл. XI, §4; [3], Гл. 6, § 6.3.
4. Формула Ньютона-Лейбница. [1], Гл. 8 § 7; [2], Гл. XI, § 4; [3], Гл. 6. § 6.4.
5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. [1], Гл.8, §§ 8-9; [2], Гл. XI, § 5, 6; [3], Гл. 6, § 6.4
6. Некоторые геометрические и физические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, длина дуги кривой, объем тела вращения, работа переменной силы. [1], Гл. 8, §10; [2], Гл. XII, §§ 1-5, 7; [3], Гл. 6, § 6.1, Гл. 7, §7.2

7. Несобственные интегралы. [1], Гл. 8, §11; [2] Гл. XI, §7; [3], Гл. 6, §§ 6.8-6.10.

Если у непрерывной функции $f(x)$ известна первообразная $F(x)$, то определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

С помощью определенного интеграла можно находить площади плоских фигур, объемы тел, длины дуг кривых, а также решать многие другие задачи.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

Решение. Найдем сначала неопределенный интеграл

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \left\| \begin{array}{l} d(1+x^2) = 2xdx \\ 1+x^2 = t \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_1^3 \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)}\Big|_1^3 =$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+3^2}-\frac{1}{1+1^2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\right)=0{,}2.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 xdx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 xdx \overset{1)}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(x+x\cos 2x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} xdx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2xdx \overset{2)}{=}$$

$$\left\|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos 2xdx & v=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx\right)=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{4}+$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}-0-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{64}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi^2}{64}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)\right)=\frac{\pi^2}{64}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2}{64}+$$

$$+\frac{1}{16}(\pi-2).$$

Поясним решение

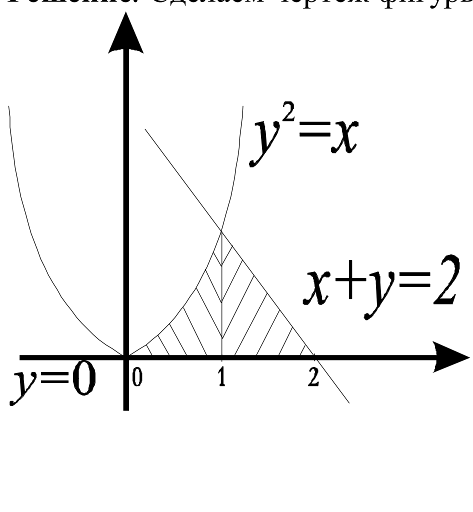
1) Применили тригонометрическую формулу

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, что дало возможность разложить интеграл на сумму двух интегралов.

2) Ко второму интегралу применили формулу интегрирования по частям для определенного интеграла: $\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$.

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $x+y=2$, $y=0$.

Решение. Сделаем чертеж фигуры.



Применим формулу $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ сначала на отрезке [0;1] к функции $y=x^2$, затем - на отрезке [1;2], к функции $y=2-x$.

Тогда $V_1=\pi\int_0^1 (x^2)^2 dx=\pi\int_0^1 x^4 dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$,

$$V_2=\pi\int_1^2 (2-x)^2 dx=\pi\int_1^2 (x-2)^2 dx=$$

$$=\left\|\begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix}\right\|=\pi\int_{-1}^0 t^2 dt=\pi\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^0=\frac{\pi}{3}(0-(-1)^3)=\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, искомый объем будет равен

$V=V_1+V_2=\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}=\frac{8}{15}\pi$ (ед.^{3}). Заметим, что объем V_2 можно было найти по известной формуле из элементарной математики, как объем конуса.

Задачи для контрольных работ

701.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=x+2$.

702.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$,

$y=\frac{x}{4}$ и $x=1$.

703.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$ и

$y=2-x$.

704.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ и $x=1$.

705. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox

фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, y=0, x=1 и x=2.

706.Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, y=2–x и y=0.

707.Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и y=2x.

708.Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2x}$ и y=x.

709. Найти длину дуги линии $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ от x=0 до x=1.

710. Найти длину дуги линии $y=2x\sqrt{x}$ от x=0 до x=4.

Тема 8. Дифференциальные уравнения

Литература. [2], Гл. VIII, §§ 2 - 9, §§ 16 - 18, 20 - 24

Основные вопросы.

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. [2] Гл. XIII, §§ 2 - 9.
4. Дифференциальные уравнения высших порядков. Некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к уравнениям первого порядка. Линейные однородные уравнения. Определитель Вронского. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные линейные уравнения второго порядка. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальными правыми частями. [2], Гл. VIII, §§ 16 - 18, 20 - 24.

Рассмотрим решение типичных задач по данной теме.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка: $y' - \frac{2}{x} \cdot y = x^3$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как содержит искомую функцию y и ее производную y' в первой степени и не содержит их произведения, т.е. имеет вид

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x).$$

Применяем метод Иоганна Бернулли, т.е. ищем решение уравнения в виде произведения двух функций $y = u(x) \cdot v(x)$.

Дифференцируя, имеем $y' = u'v + uv'$. Подставим в уравнение:

$u'v + uv' - \frac{2}{x} \cdot u \cdot v = x^3$. Вынесем v за скобки

$uv' + v\left(u' - \frac{2}{x} \cdot u\right) = x^3$. Так как искомая функция y

представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию u так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках, обращалось в нуль, т.е. $u' - \frac{2}{x} \cdot u = 0$, $\frac{du}{dx} = 2\frac{u}{x}$ или $\frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x}$

интегрируя, получим $\ln|u| = 2\ln|x|$, или $u = x^2$. Подставим в уравнение найденное значение $u(x)$: $x^2 \cdot v' = x^3$, $\frac{dv}{dx} = x$,

$dv = x\,dx$. Интегрируя, получим $v = \dfrac{x^2}{2} + C$. Тогда общее решение линейного уравнения будет $y = u \cdot v = x^2 \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} + C \right)$.

Пример 2. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 3{,}2$.

Решение. Структура общего решения данного уравнения определяется следующей основной теоремой: Общее решение линейного неоднородного уравнения можно представить как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения: $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$ Напишем однородное уравнение (уравнение без правой части): $y'' - 2y' + 10y = 0$. Составим характеристическое уравнение $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, $k^2 - 2k + 10 = 0$. Решим это уравнение $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 10}$, $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Здесь корни характеристического уравнения комплексные, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тогда общее решение однородного уравнения

$y_{о.о.} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cdot \cos\beta x + C_2 \cdot \sin\beta x\right)$. Здесь $\alpha = 1,\ \beta = 3$, тогда

$y_{о.о.} = e^{x}\left(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x\right)$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C$. Найдем производные $y'_{ч.н.} = 2Ax + B$, $y''_{ч.н.} = 2A$. Подставим эти значения в заданное уравнение:

$2A - 2 \cdot (2Ax + B) + 10 \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right) = 10x^2 + 18x + 6.$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x*:

при x^2: $10A = 10$ $\qquad A = 1$

при x^1: $-4A + 10B = 18$ $\qquad B = 2{,}2$

при x^0: $2A - 2B + 10C = 6$ $\qquad C = 0{,}84$

Частное решение уравнения имеет вид $y_{ч.н.} = x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$.

$y_{о.н.} = e^x\left(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x\right) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$. Теперь решим задачу Коши, т.е. найдем C_1 и C_2, удовлетворяющие начальным условиям. Найдем производную

$y'_{о.н.} = e^x\left(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x\right)$

$= e^x\left(-3C_1 \cdot \sin 3x + 3C_2 \cdot \cos 3x\right) + 2x + 2{,}2$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3{,}2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} C_1 + 0{,}84 = 1 \\ C_1 + 3C_2 + 2{,}2 = 3{,}2 \end{cases}$$

$C_1 = 0{,}16; \quad 3C_2 = 3{,}2 - 2{,}2 - 0{,}16 = 0{,}84; \quad C_2 = 0{,}28$.

Частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, окончательно примет вид:

$$y = e^x\left(0{,}16\cos 3x + 0{,}28\sin 3x\right) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$$

Задачи для контрольных работ

801-810 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка:

801) $y' = \dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; 802) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; 803) $xy' + y\ln\dfrac{y}{x} = 0$;

804) $x^2 y' = 2xy + 3$; 805) $xy' - 2y + x^2 = 0$;

806) $y' + y = \dfrac{1}{e^x}$; 807) $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$; 8

808) $y' + 2xy = 2x^3 y$; 809) $xy' + y = y^2 \ln x$;

810) $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$.

811-820 Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

811) $y'' + 4y = 3\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

812) $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$;

813) $y'' + y' = 3\cos x - \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

814) $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5$;

815) $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$;

816) $y'' + y = 6\sin 2x, \quad y(\pi) = -1, \quad y'(\pi) = -4$;

817) $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7$;

818) $y'' - 3y' = x + \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{1}{9}$;

819) $y'' + 9y = 6e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$;

$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.

Тема 9. Ряды

Литература. [2], т.2, гл. XVI.

Основные вопросы.

1. Что называется числовым рядом? (§1).
2. Какой ряд называют сходящимся? (§1).
3. Что называют суммой ряда? (§1).
4. Геометрическая прогрессия. (§1).
5. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд (§2).
6. Необходимый признак сходимости ряда (§2).
7. Теоремы сравнения рядов с положительными членами (§3).
8. Признак Даламбера (§4).
9. Признак Коши (§5).

10. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница (§7).

11. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость (§8).

12. Степенные ряды. Интервал сходимости (§13).

13. Ряды по степеням $(x-a)$ (§15).

14. Ряды Тейлора и Маклорена (§16).

15. Примеры разложения функций в степенные ряды (§17; §19; §20).

При исследовании рядов с положительными членами на сходимость рекомендуется проделать следующие шаги:

1) Если есть такая возможность, то нужно упростить ряд. Для этого следует:

а) каждую сумму заменить на главное слагаемое, т.е. $u+v\approx u$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v}{u}=0$;

б) воспользоваться таблицей эквивалентных функций, при $\alpha\to 0$ справедливы следующие соотношения :

$$\sin\alpha\approx\alpha;\ \mathrm{tg}\,\alpha\approx\alpha;$$

$$\arcsin\alpha\approx\alpha;\ \mathrm{arctg}\,\alpha\approx\alpha;$$

$$\cos\alpha\approx 1-\frac{\alpha^2}{2};\ e^{\alpha}\approx 1+\alpha;$$

$$\ln(1+\alpha)\approx\alpha;\ (1+\alpha)^r\approx 1+r\cdot\alpha.$$

в) упростить с помощью неравенств. При этом, например, можно воспользоваться неравенствами $|\sin x|\le 1;\quad \ln(1+x)\le x$ для всех $x\ge 0$; $n^{const}<c^n;\quad \ln^{const} n\le n;$ где константа $c>1$ и т.д.

г) мультипликативную константу можно заменить на единицу, т.е. от ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ при $k \neq 0$ можно перейти к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Пусть от ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ после упрощения удалось перейти к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, тогда по теореме сравнения получаем, что если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda, \quad \lambda \neq 0$, то с точки зрения сходимости эти ряды устроены одинаково и теперь можно исследовать на сходимость более простой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3) Далее следует воспользоваться одним из достаточных признаков сходимости:

а) проверить является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ рядом вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ для некоторой константы α. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится;

б) для исследования ряда на сходимость следует выбирать признак Даламбера, если в общий член ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ входит, либо выражение C^n, где C любая допустимая константа, либо факториал $n!$, причём эти вхождения существенные, т.е. от них нельзя избавиться. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, то при $\lambda < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $\lambda > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, при $\lambda = 1$ признак Даламбера не даёт ответа на вопрос о том сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

в) для исследования ряда на сходимость следует выбрать признак Коши, если общий член ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет вид $a_n = (\varphi(n))^n$, где $\varphi(n)$- выражение зависящее от n.

Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, то при $\lambda < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $\lambda > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, при $\lambda = 1$ признак Коши не даёт ответа на вопрос о том сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4) Если, после применения достаточных признаков сходимости, не удалось сделать вывод о том сходится или расходится исследуемый ряд, то следует проверить необходимое условие сходимости.

II) Ряды с произвольными членами исследуются только на абсолютную сходимость. При этом от исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ переходят к ряду из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, который исследуют на сходимость как ряд с положительными членами, если при этом будет установлено, что ряд из модулей сходится, то и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будет сходиться, и в этом случае исходный ряд называется абсолютно сходящимся, а это означает, что с таким рядом можно совершать арифметические операции как с обычными числами.

III) Знакочередующиеся ряды, то есть ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\ a_n>0$ исследуются на сходимость по признаку Лейбница: а) если члены знакочередующиеся ряда монотонно убывают, т.е. для всех n выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$;

б) если общий член ряда стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\ a_n>0$ сходится по признаку Лейбница

IV) Степенные ряды это ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ или вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Для рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ существует такое неотрицательное число R, что для всех x, таких, что $|x|<R$ исходный степенной ряд абсолютно сходится; а для всех x, таких, что $|x|>R$ исходный степенной ряд расходится; а для всех x, таких, что $|x|=R$ нужны дополнительные исследования.

Это число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости степенного ряда находится по формуле Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$, Интервал $-R<x<R$ называется интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, а после исследования степенного ряда на сходимость в концевых токах интервала сходимости можно написать область сходимости

степенного ряда, т.е. указать все значения x, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится.

Пример 1. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+1000}$ на сходимость.

Решение. Для данного ряда общий член имеет вид $a_n = \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+1000}$ и общий член ряда содержит операции сложения, значит этот ряд можно упростить, отбросив несущественные слагаемые: в числителе это $\sqrt{n}$, а в знаменателе это 1000.

В результате этих преобразований перейдем к ряду с общим членом $b_n = \frac{1}{n}$.

Воспользуемся теоремой сравнения и получим, что $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(n-\sqrt{n}\right)}{n^2+1000} = 1 \neq 0$, следовательно, с точки зрения сходимости эти ряды устроены одинаково и далее исследуем на сходимость более простой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, где $\alpha = 1$, такой ряд расходится, тогда по теореме сравнения и исходный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ на сходимость.

Решение. Для данного ряда общий член имеет вид $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$ и общий член ряда содержит факториал, значит, для исследования этого ряда на сходимость можно воспользоваться признаком Даламбера. Для этого последовательно получаем:

а) $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$; б) $a_{n+1} = \frac{n+1}{(2(n+1)+1)!} = \frac{n+1}{(2n+3)!}$;

в) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{(2n+3)!}\cdot\dfrac{(2n+1)!}{n}=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{(2n+3)(2n+2)}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n(2n+3)(2n+2)}=0$, Поскольку полученное значение предела оказалось меньше единицы, т. е. 0<1, то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Пример 3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-2}{7n+5}\right)^n$ на сходимость.

Решение. Общий член этого ряда имеет вид, $a_n=\left(\dfrac{3n-2}{7n+5}\right)^n\geq 0$ т.е. имеет вид $a_n=(\varphi(n))^n$, значит, для исследования этого ряда на сходимость можно воспользоваться признаком Коши. Для этого последовательно получаем:

а) $a_n=\left(\dfrac{3n-2}{7n+5}\right)^n$; б) $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n-2}{7n+5}\right)^n}=\dfrac{3n-2}{7n+5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{7n+5}=\dfrac{3}{7}$, Поскольку полученное значение предела оказалось меньше единицы, $\dfrac{3}{7}<1$, то по признаку Коши исследуемый ряд сходится.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-10)^n}{2^n\sqrt{2n+3}}$.

Решение. Исходный степенной ряд не является рядом вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$, для которых выше был описан метод исследования степенных рядов на сходимость. Для того чтобы к исходному ряду применить метод исследования на сходимость выполним замену $t=x-10$ и перейдем к исследованию на сходимость степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{2^n\sqrt{2n+3}}$. Для рядов такого вида существует такое неотрицательное число R, что для всех t, таких, что $|t|<R$ этот степенной ряд абсолютно сходится, а для всех t, таких, что $|t|>R$ этот степенной ряд расходится, и для всех t, таких, что $|t|=R$ нужны дополнительные исследования.

Такое число R называется радиусом сходимости этого степенного ряда.

Радиус сходимости этого степенного ряда находим по формуле Даламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^{n+1}\sqrt{2(n+1)+3}}{2^n\sqrt{2n+3}\cdot(-1)^{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2n+5}}{\sqrt{2n+3}}=2\ .$$

Значит при всех t, таких, что $|t|<2$ этот степенной ряд абсолютно сходится, а для всех t, таких, что $|t|>2$ этот степенной ряд расходится, и для всех t, таких, что $|t|=2$ нужны дополнительные исследования. Интервал сходимости этого ряда имеет вид, $-2<t<2.$ Тогда для исходного ряда получаем: что при всех x, таких, что $|x-10|<2$ исходный степенной ряд сходится, а для всех x, таких, что

$|x-10|>2$ исходный степенной ряд расходится, и для всех x, таких, что $|x-10|=2$ нужны дополнительные исследования. Интервал сходимости исходного ряда имеет вид $-2<x-10<2$, или $8<x<12$. Исследуем исходный ряд на сходимость в концевых точках интервала сходимости. Пусть $x=8$, тогда получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(8-10)^n}{2^n\sqrt{2n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{2n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Это ряд с положительными членами Пусть $x=12$,тогда получаем знакочередующийся ряд,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(12-10)^n}{2^n\sqrt{2n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{2^n\sqrt{2n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}.$$

Сначала исследуют на сходимость ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Упростим этот ряд. Для этого ряда общий член имеет вид $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ и общий член ряда содержит операцию сложения, значит, этот ряд можно упростить, отбросив несущественные слагаемые: в знаменателе это 3, и затем можно заменить мультипликативную константу $\frac{1}{\sqrt{2}}$ на единицу, тогда получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Применим теорему сравнения ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. и найдём при $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ и $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ предел отношения $\frac{a_n}{b_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$, значит по теореме сравнения с точки зрения сходимости эти ряды устроены одинаково. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. это гармонический ряд, где $\alpha=\dfrac{1}{2}$, такой ряд расходится, но тогда по теореме сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$ расходится. Следовательно, в точке $x=8$ исходный степенной ряд расходится. Исследуем теперь на сходимость ряд, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$, который получается из исходного степенного ряда при $x=12$. В силу проведённого исследования этот ряд не имеет абсолютной сходимости т.к. для него ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$ расходится. Исследуем этот ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ на условную сходимость. Применим к этому ряду признак Лейбница: а) это знакочередующийся ряд; б) члены этого ряда монотонно убывают, т.к. при любом n выполняется неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}>\dfrac{1}{\sqrt{2n+5}}$; в) предел общего члена этого ряда равен нулю $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}=0$. Все условия признака Лейбница выполнены, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ по признаку Лейбница сходится, а поскольку абсолютной сходимости нет, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ условно сходится. Таким образом, область сходимости исходного степенного ряда имеет вид

$8 < x \le 12$, причём в точке $x = 12$ исходный степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-10)^n}{2^n \sqrt{2n+3}}$ условно сходится.

Ответ: область сходимости имеет вид $8 < x \le 12$.

Задачи для контрольных работ.

Найти область сходимости ряда:

901) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n+11}$; 906) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-4)^n}{0{,}5n}$;

902) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$; 907) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+7)^n}{2^n \cdot n}$;

903) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n+4}$; 908) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{3^n \cdot n}$;

904) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-7)^n}{\sqrt{3n-1}}$; 909) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n+8}$;

905) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+4)^n}{\sqrt[4]{n+5}}$; 910) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+3)^n}{0{,}1n}$.

Оглавление

Васильева Е.Н., Веселова Г.В., Кажан В.А., Денисова О.И.,
Карнаухов В.М., Мусаелян А.Г., Саблин А.И.

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов 1 курса заочного отделения направления 190600 "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", профиль "Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования"

ЛР № ___________ от “__”_________2012 г.

Подписано в печать Формат 60×84/16
Т. ____ экз. Объем 4,19 уч.-изд. л. Печать офсетная
Бумага типогр. №2 Заказ Цена договорная

Редакционно-издательский отдел МГУП