**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСБЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДООБУСТРОЙСТВА**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания и контрольные задания для студентов 2 курса заочного отделения направления 190600 "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", профиль "Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования"

МОСКВА 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИРОДООБУСТРОЙСТВА

Кафедра высшей математики

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания и контрольные задания для студентов 2 курса заочного отделения направления 190600 ""Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", профиль "Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования"

Рекомендовано
Методической комиссией
заочного факультета

МОСКВА 2012

ББК 22.11
УДК 517.521

Составители: Васильева Е.Н. , Кажан В.А. , Мотанов В.Г. , Саблин А.И.

Специальные главы математики: Методические указания и контрольные задания для студентов 2 курса заочного отделения направления 190600 "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", профиль "Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования". М.: МГУП, 2012, 39 с.

Методические указания предназначены для студентов МГУ Природообустройства с целью повышения эффективности самостоятельной работы и выполнения контрольных заданий по курсу " Специальные главы математики ".

Введение

В данном пособии находятся контрольные задания, методические указания для их выполнения и методические указания для подготовки к экзамену по курсу "Специальные главы математики" для студентов второго курса заочного отделения обучающихся по направлению подготовки 190600 “Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования (водное хозяйство)”.

Для изучения материала рекомендуется пользоваться следующей литературой (в последующем тексте будут ссылки именно на указанные пособия).

Список литературы.

[1]. В.С. Шипачев, Высшая математика, М.: Высшая школа, 1998.

[2]. Н.С. Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисление, Т. 1, 2, М.: Наука, 1978.

[3]. Я.С. Бугров, С.М. Никольский, Дифференциальное и интегральное исчисление, М.: Наука, 1980.

[4]. В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский, Теория вероятностей и математическая статистика, М.: Высшая школа, 1991.

[5]. В.Е. Гмурман, Теория вероятностей и математическая статистика, М.: Высшая школа, 2008.

[6]. Г.Н. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа, М.: Наука, 2002.

Для допуска к экзамену студенты должны выполнить контрольную работу. В конце каждой темы имеется список задач для включения в контрольную работу. Вы должны решить все задачи, номера которых оканчиваются на ту же цифру, что и номер Вашей зачетной книжки. Например, если Ваша зачётная книжка имеет номер 96122, то из темы " Функции нескольких переменных" вы должны решить задачи 102 и 112, а из темы "Кратные интегралы" задачу 202.

При оформлении контрольных работ советуем придерживаться следующих правил: после номера задачи перепишите её полное условие из книжки, затем напишите слово "Решение" и затем запишите своё решение. Решать задачу можно любым известным Вам способом. После решения напишите слово "Ответ" и запишите полученный Вами ответ. Ответ должен соответствовать условию задачи.

В каждой теме перечислены основные теоретические вопросы по этой теме. При подготовке к экзамену следует иметь ввиду, что экзаменационные билеты составлены из этих вопросов.

Тема 1. Функции нескольких переменных

Литература [2], гл. VIII, §1 – 7, 12, гл. IX §6.

Основные вопросы.

1. Определение функции нескольких переменных (§1, гл. VIII).
2. Геометрическое изображение функции двух переменных (§2, гл. VIII).
3. Частное и полное приращение функции нескольких переменных (§3, гл. VIII).
4. Непрерывность функции нескольких переменных (§4, гл. VIII).
5. Частные производные функции нескольких переменных (§5, гл. VIII).
6. Геометрическая интерпретация частных производных функций двух переменных (§6, гл. VIII).
7. Полное приращение и полный дифференциал (§7, гл. VIII).
8. Частные производные высших порядков (§12, гл. VIII).
9. Экстремум функции двух переменных (§17, гл. VIII).

10. Уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности (§6, гл. IX).

Образцы решения задач

Задача 1. Исследовать на экстремум функцию $z=6x-x^2-xy-y^2-4$ и вычислить значение функции в точке экстремума.

Решение. Для того чтобы исследовать данную функцию $z=f(x,y)$ на экстремум, необходимо найти частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Если в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю или не существуют.

Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются критическими.

Найденные частные производные приравниваем к нулю и решаем полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$$ так как $$\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}=6-2x-y;\\ &\frac{\partial z}{\partial y}=-x-2y,\end{aligned}$$, то

решаем систему

$$\begin{cases}6-2x-y=0\\ -x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6-2x-y=0\\ x=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6-+4y-y=0\\ x=-2y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6+3y=0\\ x=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_0=-2\\ x_0=4\end{cases}$$

Данная функция имеет только одну критическую точку $M_0(4,-2)$.

Как и в случае одной переменной не во всякой критической точке обеспечен экстремум.

Теперь найдем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислим их значения в критической точке.

Введем обозначения: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0}$; $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0}$; $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$.

Составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2$.

Если $\Delta > 0$ в исследуемой критической точке $M_0(x_0, y_0)$, то функция $f(x, y)$ в этой точке имеет экстремум, а именно при $A < 0$ максимум, при $A > 0$ минимум. Если $\Delta < 0$, то в исследуемой точке нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то вопрос остается открытым.

Найдем частные производные второго порядка

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$.

Имеем $A = -2$; $B = -1$; $C = -2$.

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$ то в точке $M_0(4,-2)$ данная функция имеет максимум.

Вычислим значение функции в точке максимума

$$z_{\max} = f(4;-2) = 6 \cdot 4 - 4^2 - 4 \cdot (-2) - (-2)^2 - 4 =$$

$$= 24 - 16 + 8 - 4 - 4 = 8$$

Задача 2. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $3xy^2-2yz+4xz-4=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, если $x_0=-1, y_0=2$. Вычислить значение аппликаты z_1 точки $M_1(3;1;z_1)$, лежащей на этой касательной плоскости.

Решение. Определим аппликату z_0 точки касания. Для этого подставляем значения x_0 и y_0 в данное уравнение поверхности

$$3\cdot(-1)\cdot 2^2-2\cdot 2\cdot z_0+4(-1)\cdot z_0-4=0$$

$$-12-4z_0-4z_0-4=0, \qquad -8z_0=16, \qquad z_0=-2$$

Точка касания $M_0(-1;2;-2)$

Наша поверхность задана неявным уравнением. Уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, имеет вид:

$$F_x'(M_0)\cdot(x-x_0)+F_y'(M_0)\cdot(y-y_0)+F_z'(M_0)\cdot(z-z_0)=0$$

Найдем частные производные F_x', F_y' F_z' и вычислим их значение в точке касания $M_0(-1;2;-2)$:

$$F_x'=3y^2+4z,\ F_y'=6xy-2z,\ F_z'=-2y+4x$$

$$F_x'(M_0)=3\cdot 2^2+4(-2)=4,$$

$$F_y'(M_0)=6\cdot(-1)\cdot 2-2\cdot(-2)=-8,$$

$$F_z'(M_0)=-2\cdot 2+4\cdot(-1)=-8.$$

Подставим значения частных производных в уравнение касательной:

$$4\cdot(x+1)-8\cdot(y-2)-8\cdot(z+2)=0$$
$$4x+4-8y+16-8z-16=0$$
$$4x-8y-8z+4=0$$
сократив на 4, получим уравнение касательной плоскости $x-2y-2z+1=0$.

Точка $M_1(3;1;z_1)$ лежит на касательной плоскости. Следовательно, координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению касательной плоскости.

Подставив их в последнее уравнение, найдем z_1:

$3-2\cdot1-2\cdot z_1+1=0$, $-2z_1+2=0$, $z_1=1$.

Замечание: Если поверхность задана явным уравнением $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z-z_0=z_x'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+z_y'(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Задачи для контрольных работ

101 – 110. Исследовать данную функцию $z=f(x,y)$ на экстремум и вычислить значение функции в точках экстремума:

101. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$,
102. $z=x^2-xy+y^2+x+y+4$,
103. $z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y+2$,
104. $z=x^2+xy+y^2-13x-11y+17$,
105. $z=x^2+xy+y^2+4x-y+5$,
106. $z=3x^2+5xy+3y^2+4x+7y+1$,
107. $z=2x^2-3xy+2y^2-9x+12y+10$,

108. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 + x + 3,$

109. $z = 5 + 4x + 10y - 4xy - 2x^2 - 3y^2$

110. $z = 1 - x + y - 5xy - 3x^2 - 3y^2$

111 – 120. Дано уравнение поверхности в виде $F(x, y, z) = 0$ или $z = f(x, y)$. Требуется составить уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если абсцисса x_0 и ордината y_0 заданы. Найти также аппликату z_1 точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на этой касательной плоскости, если даны абсцисса x_1 и ордината y_1 точки M_1:

111. $3x^2y + 2xz - yz + x + 1 = 0$, $M_0(1;-2;z_0), M_1(1;0;z_1)$.

112. 122. $2xy^2 - x^2z + 2yz + 2y + 4 = 0$, $M_0(-1;1;z_0)$,
$M_1(2;1;z_1)$.

113. $x^2z - 2xy^2 + 2yz + y + 1 = 0$, $M_0(2;-1;z_0), M_1(0;1;z_1)$.

114. $xyz + x^2z - 2x - y + 3 = 0$, $M_0(-2;3;z_0), M_1\left(\frac{1}{2};1;z_1\right)$.

115. $x^2y^2 + 2xyz - 4yz - 5x = 0$,
$M_0(3;-1;z_0), M_1(1;-1;z_1)$.

116. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$, $M_0(2;1;z_0), M_1\left(\frac{1}{2};0;z_1\right)$.

117. $z = xy + 2y^2 - 2x$, $M_0(1;2;z_0), M_1(-1;1;z_1)$.

118. $z = 2x^2 + y^2 + 3y$, $M_0(2;-2;z_0), M_1(1;0;z_1)$.

119. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $M_0(1;2;z_0), M_1(0;1;z_1)$.

120. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1, \quad M_0(2;4;z_0), M_1(3;2;z_1)$.

Тема 2. Кратные интегралы

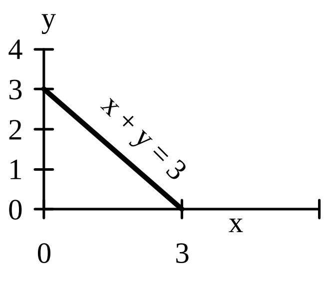
Литература [2], гл. XIV, § 1 – 6, 10.

Основные вопросы.

1. Определение двойного интеграла (§1).
2. Свойства двойного интеграла (§1).
3. Вычисление двойного интеграла (§2,3).
4. Двойной интеграл в полярных координатах (§5).
5. Замена переменных в двойном интеграле (§6).
6. Координаты центра тяжести площади плоской фигуры (§10).

Задача 1. Вычислить при помощи двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:
$z = 4x^2 + 2y^2 + 1,\ x + y - 3 = 0,\ \ x = 0, y = 0, z = 0$.

Решение. Вначале найдем проекцию тела на плоскость xoy.



Плоскость $x+y-3=0$ параллельная оси oz, другие поверхности $x=0, y=0, z=0$ являются координатными плоскостями.
Заданное тело ограничено сверху эллиптическим параболоидом $z=4x^2+2y^2+1$.
Из самого определения двойного интеграла вытекает, что двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу областью D на плоскости xoy, а с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси oz и проходят через границу области D:
$V=\iint\limits_D\left(4x^2+2y^2+1\right)dxdy$. Вычислим этот интеграл.
В области D y изменяется от 0 до 3, а x изменяется от $x=0$ до $x=3-y$.

$$V=\int_0^3 dy\int_0^{3-y}\left(4x^2+2y^2+1\right)dx=\int_0^3 dy\left[\frac{4}{3}x^3+2y^2x+x\right]\Bigg|_0^{3-y}=$$

$$=\int_0^3\left[\frac{4}{3}(3-y)^3+2y^2(3-y)+(3-y)-0\right]dy=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^3(3-y)^3\,dy+\int_0^3\left(6y^2-2y^3+3-y\right)dy=$$

$$=-\frac{4}{3}\int_0^3(3-y)^3\,d(3-y)+\left(6\cdot\frac{y^3}{3}-2\frac{y^4}{4}+3y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=-\frac{4}{3}\frac{(3-y)^4}{4}\Bigg|_0^3+\left(2y^3-\frac{y^4}{2}+3y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$= 0 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3^4}{4} + 2 \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^4 + 3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} =$$

$$= 27 + 54 - \frac{81}{2} + 9 - \frac{9}{2} = 45 \text{ (куб. ед.)}$$

Задачи для контрольных работ

121 – 130. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Область интегрирования изобразить на чертеже.

201. $z = 2x + y$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 0, y = 0, z = 0$.
202. $z = x^2 + 3y^2$, $x + y = 2$, $x = 0, y = 0, z = 0$.
203. $z = 8 - x^2 - 2y^2$, $y = 2 - 2x$, $x = 0, y = 0, z = 0$.
204. $z = 4 - y^2$, $x = 4 - 2y$, $x = 0, y = 0, z = 0$.
205. $z = 3x^2 + 3y^2$, $y = x^2$, $y = 1, z = 0$.
206. $z = 3y^2$, $x = 2$, $x = 0, y = 1, z = 0$.
207. $z = x^2 + y^2$, $x = 2 - 2y$, $x = 0, y = 0, z = 0$.
208. $z = 2x^2 + 3y^2$, $x + y = 1$, $x = 0, y = 0, z = 0$.
209. $z = 6 - x - y$, $2x + y = 4$, $x = 0, y = 0, z = 0$.
210. $z = x^2 + 1$, $4x + 3y - 12 = 0$, $x = 0, y = 0, z = 0$.

Тема 3. События и вероятности

Литература. [4], гл. I; [5], гл 1 – 4.

Основные вопросы.

1. Испытания и события, виды случайных событий, классическое определение вероятности. Относительная частота, статистическая вероятность. [4], гл. 1, §§ 1.1, 1.2; [5], гл. 1, §§ 1 – 3, 5 – 7.

2. Алгебра событий. Аксиоматическое построение теории вероятностей. [4], гл. 1, §§ 1.1, 1.4.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности. [4], гл. 1, § 1.4, гл. 2, §2.1; [5], гл. 2, §§1 – 3, гл. 3, §§ 1 – 5, гл. 4, §1.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса. [4], гл. 2, §2.1; [5], гл. §2, 3.
5. Последовательности испытаний. [4] гл. 2, §2.2.

Рассмотрим решения некоторых задач на определение вероятностей событий, в которых используются теоремы сложения вероятностей, умножения вероятностей, формула полной вероятности.

Пример 1. В урне находится 7 белых и 5 красных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что:

а) оба вынутых шара будут белыми;

б) оба вынутых шара будут одного цвета.

Решение:

В данной задаче опыт или испытание состоит в том, что из урны последовательно вынимают два шара (с возвращением). Рассмотрим следующие события:

A – первый вынутый шар белого цвета;

$\overline{A}$ – противоположное событию А событие, состоящее в том, что первый вынутый шар окажется красным;

B – второй вынутый шар белого цвета;

$\overline{B}$ - второй вынутый шар красного цвета;

C – оба вынутых шара белого цвета;

D – оба вынутых шара одного цвета;

В пункте а) надо найти вероятность $P(C)$ события C. Событие C равно произведению событий A и B, т. е. событие C состоит в том, что в результате опыта произойдут вместе событие A и событие B: $C = A \cdot B$

События A и B - независимые, т.е. вероятность каждого из них не зависит от того, что появится другое событие или нет. По теореме умножения вероятностей

$$P(C)=P(A)\cdot P(B)=\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{49}{144}$$

В пункте б) надо найти вероятность $P(D)$ события D, которое состоит в том, что либо первый и второй шары будут оба белыми $A\cdot B$, либо первый и второй шары будут оба красными $\overline{A}\cdot\overline{B}$. Таким образом, событие D равно сумме событий $A\cdot B$ и $\overline{A}\cdot\overline{B}$:

$$D=A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B}$$

События $A\cdot B$ и $\overline{A}\cdot\overline{B}$ несовместные, поэтому по теореме сложения вероятностей вероятность события D будет равна

$$P(D)=P\left(A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=P(A\cdot B)+P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)$$

Воспользуемся теоремой умножения вероятностей независимых событий, тогда

$$P(D)=P(A)\cdot P(B)+P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)=$$

$$=\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}+\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{37}{72}$$

Отметим, что вероятности событий $A,B,\overline{A},\overline{B}$ были найдены по формуле классической вероятности:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где n - число всех равновероятных исходов эксперимента; m - число благоприятных событию A исходов.

Ответ: а) $\frac{49}{144}$; б) $\frac{37}{72}$.

Пример 2. В урне находится 3 белых и 7 черных шаров. Из урны случайным образом вынимаются два шара. Найти вероятность того, что эти шары разных цветов.

Решение: Опыт состоит в том, что вынимаются два шара. Рассмотрим следующие события:

A - первый вынутый шар белый;

$\overline{A}$ - первый шар – черный;

B - второй шар – белый;

$\overline{B}$ - второй шар – черный;

C - вынутые шары разных цветов.

Событие C можно представить следующим образом:

$$C = A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B$$

События $A\cdot\overline{B}$ и $\overline{A}\cdot B$ - несовместные, поэтому

$$P(C) = P\left(A\cdot\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\cdot B\right)$$

События A и $\overline{B}$ зависимые, поэтому вероятность $P\left(A\cdot\overline{B}\right)$ по теореме умножения вероятностей равна вероятности $P(A)$ первого события A, умноженной на условную вероятность $P\left(\overline{B}\,|\,A\right)$ второго события $\overline{B}$ при условии, что первое событие A произошло:

$$P\left(A\cdot\overline{B}\right) = P(A)\cdot P\left(\overline{B}\,|\,A\right) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}.$$

Аналогично

$$P\left(\overline{A}\cdot B\right) = P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(B\,|\,\overline{A}\right) = \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}.$$

Поэтому

$$P(C) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{7}{15}.$$

Ответ: $\frac{7}{15}$.

Пример 3. Вероятность установления в данной местности устойчивого снежного покрова с октября равна 0,1. Определить вероятность того, что в ближайшие три года в этой местности устойчивый снежный покров с октября установится по крайней мере один раз.

Решение. Рассмотрим следующие события:

A_1 - в первый ближайший год устойчивый снежный покров установится с октября;

A_2 - во второй ближайший год – установится с октября;

A_3 - в третий ближайший год – установится с октября;

A - в ближайшие три года устойчивый снежный покров установится с октября по крайней мере один раз;

$\overline{A}$ - в ближайшие три года с октября не будет ни разу устойчивого снежного покрова.

Найдем вероятность $P(A)$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) =$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) =$$

$$= 1 - (1 - 0{,}1)(1 - 0{,}1)(1 - 0{,}1) = 1 - (0{,}9)^3 = 0{,}271$$

Ответ: $0{,}271$.

Пример 4. Для посева заготовлены семена пшеницы первого сорта, содержащие 1% примесей второго сорта и 3% примесей третьего сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не мене 50 зерен, равна для первого сорта – 0,5, для второго сорта – 0,2, для третьего сорта – 0,05. Найти вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

Решение:

Рассмотрим события:

A - событие, состоящее в том, что из наудачу взятого зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен;

H_1 - событие, состоящее в том, что наудачу взятое зерно окажется первого сорта;

H_2 - событие, состоящее в том, что наудачу взятое зерно окажется второго сорта;

H_3 - событие, состоящее в том, что наудачу взятое зерно окажется третьего сорта.

По условию задачи имеем:

$P(H_1) = 0{,}96; \quad P(H_2) = 0{,}01; \quad P(H_3) = 0{,}03$

$P(A|H_1) = 0{,}5; \quad P(A|H_2) = 0{,}2; \quad P(A|H_3) = 0{,}05$

Применяя формулу полной вероятности, получаем:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3),$$

$$P(A) = 0{,}96\cdot 0{,}5 + 0{,}01\cdot 0{,}2 + 0{,}03\cdot 0{,}05 = 0{,}4835$$

Ответ: $0{,}4835$.

Задачи для контрольных работ

301. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель. Вероятности попадания равны: для первого стрелка -- 0,6 , для второго -- 0,7 , для третьего -- 0,8. Найти вероятность одного попадания в цель.
302. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85 , из второго - 0,91. Найти вероятность поражения цели.
303. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка - 0,8 , а для второго - 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет только один из стрелков?
304. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течении часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,7 ; для второго станка эта вероятность равна 0,8 ; для третьего -- 0,9 ; для четвертого -- 0,85. Найти вероятность того, что в течении часа по крайней мере один станок потребует к себе внимания рабочего.

305. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета, равны 0,9 ; на третий -- 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса.

306. Детали проходят три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02, на второй - 0,03, на третьей - 0,02. Найти вероятность получения детали без брака после трех операций, предполагая, что получение брака на отдельных операциях являются независимыми событиями.

307. Пусть вероятность того, покупателю женской обуви потребуется обувь 37 размера, равна 0,25. Найти вероятность того, что из четырех первых покупателей обувь этого размера потребуется хотя бы одному.

308. Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель каждым из охотников одинаковы и равны по 0,7. Найти вероятность того, что будет произведено три выстрела.

309. В двух ящиках находятся детали: в первом - 12 (из них 4 стандартных), во втором - 18 (из них 15 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

310. В студии телевидения 3 телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

311. На базе находятся костюмы, изготовленные на трех фабриках. Из них 30% изготовлено на первой, 50% на второй и 20% на третьей фабрике. Известно, что из каждых 100 костюмов, изготовленных на первой фабрике, знак качества имеют 60. Для второй и третьей фабрик этот показатель равен, соответственно, 70 и

80.Определить вероятность того, что взятый наугад с базы костюм не будет иметь знака качества.

312. В магазин поступают одинаковые электрические утюги. Первый завод поставляет 80%, второй - 20% всей продукции. Известно, что первый завод выпускает 90% продукции первого сорта, второй - 95%. Какова вероятность того, что проданный покупателю утюг партии первого сорта ?

313. Электролампы изготавливаются на трёх заводах. Первый завод производит 45\% общего количества электроламп, второй -- 40%, третий -- 15%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго -- 80%, третьего -- 81% . В магазины поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется стандартной ?

314. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3% брака, второй -- 0,2% и третий -- 0,4%. С первого автомата поступило 1000, со второго -- 2000 и с третьего -- 2500 деталей. Какова вероятность попадания на сборку бракованной детали ?

315. На фабрике, изготавливающей болты, первый станок производит -- 25%, второй -- 35%, третий -- 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5% , 4% и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный ?

316. Электрические лампочки производятся на двух заводах, причем первый из них поставляет 70%, а второй 30% всей поставляемой продукции. Из каждых 100 лампочек первого завода в среднем 83 стандартных, а из 100 лампочек второго завода - лишь 63 стандартных. Найти вероятность того, что взятая наудачу лампочка окажется стандартной.

317. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора; ненормальный - в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время в

нормальном режиме равна 0,2; в ненормальном - 0,6. Найти вероятность выхода прибора из строя за время .

318. В группе спортсменов 15 лыжников, 8 конькобежцев и 7 бегунов. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0,8, для конькобежца - 0,7, для бегуна - 0,9. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

319. В хозяйстве имеется 6 гусеничных и 4 колесных трактора. Гусеничный трактор работает надежно с вероятностью 0,95 , а колесный с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что случайно выбранный для работы трактор будет работать надежно?

320. В группе стрелков два мастера спорта, три кандидата в мастера и пять перворазрядников. Мастер спорта попадает в десятку с вероятностью 95%, кандидат в мастера с вероятностью 90%, перворазрядник с вероятность 80%. Какова вероятность, что случайно выбранный стрелок попадёт в десятку ?

Тема 4. Случайные величины

Литература. [5], гл. 6, 7, 8, 10, 11, 12.

Основные вопросы:

1. Чем отличаются дискретная и непрерывная случайные величины? Привести примеры.
2. Что такое закон распределения вероятностей дискретной случайной величины?
   Привести примеры. [5] Гл. 6 §§ 3, 4, 5, 7, 8.
3. Что такое интегральная функция распределения вероятностей и плотность вероятности? Как они связаны между собой? [5] Гл. 10 §§ 1-3, Гл. 11 §§ 1 – 5
4. Что такое математическое ожидание $M(X)$ и как его вычисляют? [5] Гл. 7 §§ 1, 2, 3, 5; Гл. 12 §1.

5. Что такое дисперсия $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$? [5] Гл. 8 §§ 1 – 4, 6, 7; Гл. 12 § 1.
6. Как определить вероятность попадания случайной величины X в любой заданный интервал, если известны интегральная функция распределения вероятностей или плотность вероятности? [5] Гл. 10 § 2; Гл. 11 § 2.
7. Что такое нормальное распределение вероятностей? Как вычисляют вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в любой заданный интервал? [5] Гл. 12 §§ 2, 5.

Случайная величина, т. е. величина, значение которой зависит от случая, может быть “дискретной” – это когда она может принимать только отдельные, изолированные значения (например, номер, который достанется участнику соревнований) и “непрерывной” – это когда она может принимать все значения из некоторого промежутка (например, время, за которое спортсмен пробежит дистанцию) .

Задать закон распределения дискретной случайной величины – это значит указать все ее возможные значения и указать вероятности этих значений. Например, если случайная величина X - это число выпадения герба при двух бросках монеты, то возможные значения такой случайной величины –это 0, 1, 2. Вероятности этих значений соответственно 0,25; 0,5; 0,25. Как это подсчитать покажем ниже. Обычно возможные значения и их вероятности принято записывать в таблицу:

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Если такая таблица записана, то говорят, что закон распределения данной дискретной случайной величины известен.

Непрерывная случайная величина задается иначе. Для нее указывают либо так называемую “интегральную” функцию распределения $F(x)=P(X<x)$, т. е. функцию, равную вероятности того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, меньше x, либо указывают производную от этой функции $F(x)$, обозначаемую через $f(x)$, так называемую “плотность вероятности”. То есть $f(x)=F'(x)$.

В зависимости от вида функции $f(x)$ говорят о том или другом законе распределения вероятностей данной непрерывной случайной величины. Например,

a) Закон равномерного распределения – если

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<a \\ C & при \quad a<x<b \\ 0 & при \quad b<x\end{cases}$$

где постоянная $C=1/(b-a)$. Заметим, что в этом случае интегральная функция имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при & x<a \\ x/(b-a) & при & a<x<b \\ 1 & при & b<x\end{cases}$$

b) Показательный закон распределения – если $f(x)=0$ при $x<0$ и $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x>0$.

c) Нормальный закон распределения – если $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$.

Если закон распределения известен, появляется возможность вычислить все характеристики данной случайной величины. Наиболее известны следующие характеристики:

1. Математическое ожидание $M(X)$, определяющее “среднее значение” величины X. Для дискретной случайной

величины $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$, т. е. это сумма произведений возможных значений на их вероятности.

Для непрерывной случайной величины $M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

2. Дисперсия $D(X)$, характеризующая “степень рассеяния” возможных значений случайной величины X вокруг ее среднего значения $M(X)$.

   По определению $D(X)=M(X-M(X))^2$ или

   $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$, что дает для дискретной

   случайной величины $D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i-(M(x))^2$,

   а для непрерывной случайной величины

   $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(x))^2$.

3. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

   Если известны функции $F(x)$ и $f(x)$, легко вычислить вероятность попадания случайной величины X в любой интервал (a,b):

   $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$ или, соответственно

   $P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$.

   Для нормального закона распределения этот интеграл просчитан и выражен через так называемую функцию

Лапласа $\Phi(x)$ так, что

$$P(a < X < b) = \Phi((b-m)/\sigma) - \Phi((a-m)/\sigma).$$

Для решения контрольных заданий укажем здесь, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и что $\Phi(0) = 0$; $\Phi(1) = 0,3413$; $\Phi(2) = 0,4772$; $\Phi(3) = 0,49865$; $\Phi(4) = 0,49997$; $\Phi(5) = 0,49999$.

Более подробные значения функции Лапласа можно найти в рекомендованных выше учебниках.

Пример 1. Случайная величина X - это число выпадения герба при двух бросках монеты. Построить закон распределения этой случайной величины и найти ее математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение: По формуле Бернулли число k появление события A в n испытаниях имеет вероятность $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В данной задаче число p, т. е. вероятность выпадения герба, равно $1/2$. Соответственно q тоже равно $1/2$.

Поэтому вероятность того, что при двух бросках герб не выпадет ни разу, т. е. что случайная величина X примет значение $x = 0$, будет равна $P_2(0) = C_2^0 p^0 q^2 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Вероятность одного выпадения герба, т. е. вероятность того, что X примет значение $x = 1$ будет равна $P_2(1) = C_2^1 p^1 q^1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

И, наконец, вероятность того, что оба броска закончатся выпадением герба, т. е. случайная величина X примет значение $x = 2$, будет равна $P_2(2) = C_2^2 p^2 q^0 = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Итак, получаем такой закон распределения

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Теперь находим $M(X)$, $D(x)$ и $\sigma(X)$.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i = x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i^{\,2}p_i-\left(M(x)\right)^2=x_1^{\,2}p_1+x_2^{\,2}p_2+x_3^{\,2}p_3-(1)^3=$$

$$=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}-1=\frac{1}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{1/2}\approx 0{,}707$$

Ответ: $M(X)=1$; $D(x)=0{,}5$; $\sigma(X)=0{,}707$.

Пример 2. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, если плотность $f(x)=0$ при $x<0$, и равна $f(x)=5e^{-5x}$ при $x\geq 0$. Как называется закон распределения такой случайной величины?

Решение:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x0dx+\int_{0}^{\infty}x5\cdot e^{-5x}dx=-\int_{0}^{\infty}xd\left(e^{-5x}\right)=$$

$$=-xe^{-5x}\Big|_0^{\infty}+\int_{0}^{\infty-\infty}e^{-5x}dx=0-\frac{e^{-5x}}{5}\Bigg|_0^{\infty}=1/5$$

Мы использовали метод интегрирования по частям, а также, что

$$-xe^{-5x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{5x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{5e^{5x}} = 0$$

по правилу Лопиталя.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(x)\right)^2 = \int_0^{\infty} x^2 5e^{-5x}dx - \frac{1}{25} =$$

$$= -\int_0^{\infty} x^2 d\left(e^{-5x}\right)dx - \frac{1}{25} =$$

$$= x^2e^{-5x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-5x}\cdot 2xdx - \frac{1}{25} = 0 + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{1}{25}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{1/25} = 1/5$$

Ответ: $M(x) = 1/5$; $D(x) = 1/25$; $\sigma(x) = 1/5$. Закон распределения – показательный, с параметром $\lambda = 5$.

Пример 2. Найти вероятность попадания в заданный интервал $(0,6)$ нормально распределенной случайной величины X , если ее математическое ожидание $m = 4$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma = 2$

Решение: Известно, что

$$P(a < X < b) = \Phi\left((b-m)/\sigma\right) - \Phi\left((a-m)/\sigma\right),$$

поэтому

$$P(0 < X < 6) = \Phi\left((6-4)/2\right) - \Phi\left((0-4)/2\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$$\Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185$$

Ответ: 0,8185.

Задачи для контрольных работ

401. Вероятность попадания при каждом выстреле $p = 0.8$. Имеется три снаряда. Написать закон распределения случайной величины X - числа израсходованных снарядов, если стрельба ведется до первого попадания в цель. Найти математическое ожидание $M(X)$ этой случайной величины.

402. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появления события A в трех независимых испытаниях, если в одном испытании событие A происходит с вероятностью $0,4$.

403. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна $0,3$. Определить закон распределения случайной величины X числа попадания в мишень при трех выстрелах и найти ее математическое ожидание $M(X)$.

404. В урне имеется 4 шара с номерами от 1 до 4. Вынули 2 шара. Случайная величина X - сумма номеров этих шаров. Найти закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание $M(X)$.

405. Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ непрерывной случайной величины X, если интегральная функция $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(x) = x/5$ при $0 \le x < 5$, и $F(x) = 1$ при $x \ge 5$. Как называется закон распределения такой случайной величины?

406. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ непрерывной случайной величины X, если плотность $f(x) = 0$ при

$x < 0$ и $f(x) = 2e^{-2x}$ при $x > 0$. Как называется закон распределения такой случайной величины?

407. Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ непрерывной случайной величины X, если интегральная функция $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(x) = x/7$ при $0 \le x < 7$, и $F(x) = 1$ при $x \ge 7$. Как называется закон распределения такой случайной величины?

408. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ непрерывной случайной величины X, если плотность $f(x) = 0$ при $x < 0$, и $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x > 0$. Как называется закон распределения такой случайной величины?

409. Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ непрерывной случайной величины X, если интегральная функция $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(x) = x/9$ при $0 < x < 9$, и $F(x) = 1$ при $x > 9$. Как называется закон распределения такой случайной величины?

410. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ непрерывной случайной величины X, если плотность $f(x) = 0$ при $x < 0$, и $f(x) = 4e^{-4x}$ при $x > 0$. Как называется закон распределения такой случайной величины?

В следующих задачах требуется найти вероятность попадания в заданный интервал (a, b) нормально распределенной случайной величины X , если известны ее математическое ожидание m и среднее квадратичное отклонение σ.

411. a =1, b = 3, m = 1, σ = 2,
412. a =3, b = 7, m = 2, σ = 1,
413. a =3, b = 7, m = 3, σ = 1,
414. a =0, b = 8, m = 0, σ = 4,
415. a =1, b = 9, m = 1, σ = 2,
416. a =6, b = 9, m = 6, σ = 1,
417. a =0, b = 9, m = 0, σ = 3,
418. a =5, b = 8, m = 2, σ = 3,
419. a =5, b = 9, m = 5, σ = 3,
420. a =8, b = 9, m = 7, σ = 1.

Тема 5. Элементы математической статистики

Литература. [5], гл.15, гл.16

Математическая статистика занимается методами сбора и обработки статистического материала – результатов наблюдений над объектами и анализом полученных данных для выявления ряда закономерностей случайных явлений.

В статистике оперируют понятием статистическое распределение, то есть соответствием между количественными признаками наблюдаемых объектов и их частотами.

Назовем исследуемую совокупность однородных объектов генеральной совокупностью, а множество из n объектов, которые выбирают случайным образом из генеральной совокупности – выборочной совокупностью, или просто выборкой (n - объем выборки).

Подробнее о предмете и задачах математической статистики, о генеральной, выборочных совокупностях, способах отбора и требованиям к объектам, о статистическом распределении выборки см. [5] (глава 5 § 1-6). По статистическому распределению составляется эмпирическая функция распределения – оценка функции распределения признака в генеральной совокупности, строятся полигон и гистограмма частот [5] (§ 7 - 8).

Для параметров распределения признаков в генеральной совокупности находятся точечные и интервальные оценки. Оценка называется точечной, если она характеризуется одним числом. Точечными оценками параметров распределения являются выборочная средняя, выборочная дисперсия [5] (глава 16 § 1). Интервальная оценка характеризуется двумя числами – концами интервала.

Интервал (0-б, 0+б), накрывает оцениваемый параметр с вероятностью γ, при этом вероятность γ называется доверительной. Подробнее об этой оценке, о связи между доверительным интервалом, доверительной вероятностью и объемом выборки для случая нормального распределения признака в генеральной совокупности см. [5] (глава 16 § 14 – 19).

Основные вопросы к теме

1. Предмет и задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Репрезентативность выборки. Способы отбора статистического материала (повторный, случайный, механический).
2. Статистическое распределение. Варианты, частоты, относительные частоты. Графическое представление выборки – полигон частот, гистограмма частот.
3. Эмпирическая функция распределения. Определение, свойства.
4. Выборочные характеристики статистического распределения: выборочная средняя $\overline{x}_B$, выборочная D_B и исправленная выборочная s^2 дисперсии, выборочное σ_B и исправленное s выборочное среднее квадратическое отклонение, мода и медиана.

5. Статистические оценки параметров распределения. Основные определения. Несмещенная, состоятельная и эффективная оценка. Оценки математического ожидания и генеральной дисперсии.
6. Доверительный интервал. Доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения.

Пример. Дана выборка из 16 элементов некоторого признака X из генеральной совокупности 19, 15, 16, 17, 18, 19,16, 16, 18, 18, 17, 17, 17, 16, 17, 18.
Считаем, что распределение дискретное – возможные значения признака изолированы друг от друга.

Требуется:

1) Записать в виде вариационного и статистического рядов эту выборку.
2) Построить полигон относительных частот выборки.
3) Найти и построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ по данному распределению выборки.
4) Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, исправленное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, среднее абсолютное отклонение, коэффициент вариации вариационного ряда.
5) В предположении, что X распределена по нормальному закону построить доверительный интервал для математического ожидания с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение:

Если упорядочим элементы выборки по величине получим вариационный ряд:

15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 19

Размах выборки $\omega = 19 - 15 = 4$.

Статистический ряд запишем в виде таблицы, где x_i - перечень вариант вариационного ряда, n_i - соответствующие частоты.

x_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

Контроль: $\sum_{i=1}^{5} n_i = 16$

Найдем относительные частоты $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$.

ω_i	0,0625	0,25	0,3125	0,25	0,125

Построим полигон относительных частот выборки (рис. 1) – ломаную линию, соединяющие точки (x_i, ω_i), где x_i - варианты выборки, ω_i - соответствующие им относительные частоты.

По данному распределению выборки найдем эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$.

Функция $F^*(x)$ определяет для каждого X частоту события $X < x$, $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n_x - число вариант меньше X.

Меньшая варианта равна 15, следовательно, $F^*(x) = 0$, при X≤15, для наибольшей X = 19 имеем: $F^*(x) = 1$, при X>19.

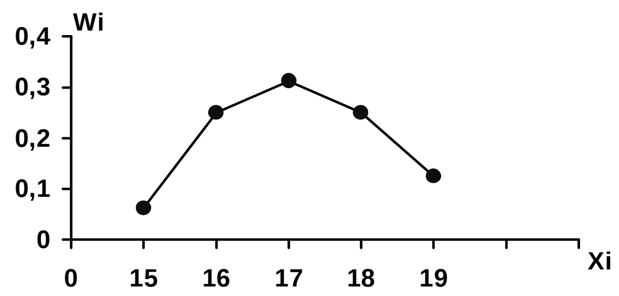


Рис.1

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & x\le 15 \\ \dfrac{1}{16}=0,0625 & 15<x\le 16 \\ \dfrac{1+4}{14}=0,0625+0,25=0,3125 & 16<x\le 17 \\ \dfrac{1+4+5}{16}=0,3125+0,3125=0,625 & 17<x\le 18 \\ \dfrac{1+4+5+4}{16}=0,625+0,25=0,875 & 18<x\le 19 \\ 1 & x>19 \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения изображен на рис.2.

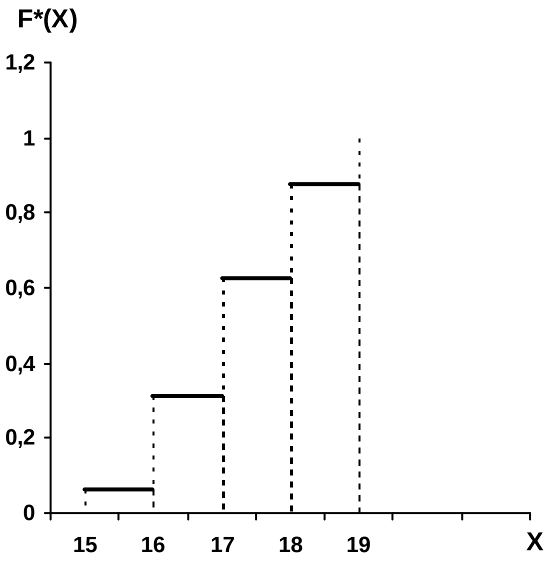


Рис. 2

Найдем выборочные числовые характеристики.

Выборочная средняя

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i = \frac{1}{16}\left(15\cdot 1 + 16\cdot 4 + 17\cdot 5 + 18\cdot 4 + 19\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{15+64+85+72+38}{16} = \frac{274}{16} = 17{,}125$$

Выборочная дисперсия – среднее арифметическое значение квадратов отклонения признака от выборочного среднего.

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 n_i$$

Для подсчета D_B составим таблицу.

Первый способ подсчета:

$x_i - \overline{x}_B$	$\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2$	$\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 n_i$
-2,125	4,516	4,515
-1,125	1,200	5,0625
0,125	0,0156	0,0781
0,875	0,766	3,0625
1,875	3,5156	7,031
		$\sum$=19,75

$$D_B = \frac{19{,}75}{16} \approx 1{,}2344$$

Второй способ подсчета:

x_i^2	225	256	289	324	361
n_i	1	4	5	4	2
$\cdot n_i x_i^2$	225	1024	1445	1296	722
					$\sum$=4712

$$D_B = \overline{x^2} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \frac{n_i}{n} - \left(\overline{x}_B\right)^2$$

$$\left(\overline{x}_B\right)^2 = \left(17{,}125\right)^2 \approx 293{,}2656$$

$$D_B = \frac{4712}{16} - 293{,}2656 \approx 294{,}56 - 293{,}2656 \approx 1{,}234$$

Вычислим исправленное среднее квадратическое выборочное

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{15}{16} \cdot 1{,}234 \approx 1{,}317$$

и исправленное среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{s^2} \approx 1{,}147$$

Модой M_0 называют значение признака, которое имеет наибольшую частоту: $M_0 = 17$

Медианой m_e называют значение признака, который делит статистическое распределение на две равные части:

$$m_e = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{если} \quad n = 2k+1 \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}, & \text{если} \quad n = 2k \end{cases} \qquad m_e = \frac{17+18}{2} = 17{,}5.$$

Коэффициент вариации:

$$\mathrm{V} = \frac{\sigma_b}{\overline{x}_b} \cdot 100\% = \frac{1{,}11}{17{,}125} \cdot 100\% \approx 6{,}49\%$$

Среднее абсолютное отклонение:

$$\theta=\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i\left|x_i-\overline{x}_b\right|}{n}=\frac{|15-17,125|\cdot 1+|16-17,125|\cdot 4+}{}$$

$$\frac{+|17-17,125|\cdot 5+|18-17,125|\cdot 4+|19-17,125|\cdot 2}{16}=$$

$$=\frac{14,5}{16}\approx 0,906$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания имеет вид:

$$\left(\overline{x}_B-t_\gamma\cdot\frac{\sigma_B}{\sqrt{n}};\overline{x}_B+\frac{\sigma_B}{\sqrt{n}}\cdot t_\gamma\right)$$

Имеем: $n=16$; $\sqrt{n}=4$; $\sigma_B=\sqrt{D_B}=1,111$; $\overline{x}_B=17,125$.

Число t_γ определяем из условия: $\Phi\left(t_\gamma\right)=\dfrac{0,95}{2}=0,475$, по таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (см. приложение 2 в [5]) отыщем аргумент $t_\gamma=1,96$. Левый конец интервала равен $17,125+1,96\cdot\dfrac{1,111}{4}=17,687$, правый конец - $17,125-1,96\cdot\dfrac{1,111}{4}=16,56$.

Интервал (16,56; 17,687) покрывает неизвестное математическое математическое ожидание с надежностью $\gamma = 0,95$.

Контрольные здания

В задачах № 501 – 510 требуется по заданной выборке из n элементов некоторого признака x. Найти

1. Вариационный и статистический ряды;
2. Построить полигон относительных частот;

3. Эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ и построить ее график;

4. $\overline{x}_B$ - выборочное среднее; D_B - выборочную дисперсию; s^2 - исправленную дисперсию; σ_B, s - средние квадратические отклонения - выборочное и исправленное; M_0 - моду; m_e - медиану; θ - среднее абсолютное отклонение; V - коэффициент вариации вариационного ряда.

5 В предположении, что х распределена по нормальному закону построить доверительный интервал для неизвестного математического ожидания с данной надежностью γ.

501. 10, 11, 10, 12, 12, 11, 13, 13, 12, 12, 11, 14, 14, 10, 12, 11, 13, 12 γ=0,95
502. 21, 25, 23, 24, 24, 23, 21, 23, 22, 22, 22, 22, 23, 24, 25, 24, 21, 23; γ=0,97
503. 1, 5, 3, 4, 4, 3, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 1, 3; γ=0,95
504. 36, 35, 36, 35, 37, 34, 38, 37, 38, 34, 34, 37, 36, 35, 36; γ=0,99
505. 6, 2, 2, 8, 4, 4, 4, 2, 6, 2, 6, 8, 6, 8, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 2; γ=0,95
506. 9, 9, 9, 8, 7, 8, 7, 6, 7, 8, 9, 8, 6, 6, 7, 7, 7, 8; γ=0,99
507. 12, 12, 14, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 16, 18, 18, 18, 16, 16, 14; γ=0,97
508. 13, 15, 17, 13, 13, 15, 11, 11, 11, 9, 11, 13, 17, 15, 9, 9; γ=0,95
509. 20, 21, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 24, 23, 22, 22, 21, 20, 21; γ=0,97
510. 31, 32, 33, 34, 35, 34, 35, 33, 31, 33, 31, 32, 33, 34, 32, 32; γ=0,95

Оглавление

Васильева Е.Н. , Кажан В.А. , Мотанов В.Г. , Саблин А.И.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ
МАТЕМАТИКИ
Методические указания и контрольные задания для студентов 2 курса заочного отделения направления 190600 "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", профиль "Сервис транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования"

ЛР № ___________ от “___”_________2012 г.

Подписано в печать	Формат 60×84/16
Т. ____ экз. Объем 2,44 уч.-изд. л.	Печать офсетная
Бумага типогр. №2 Заказ	Цена договорная

Редакционно-издательский отдел МГУП